10.46551/emd.v9n18a18 ISSN 2526-6136

# Entre o saber e o ensinar: obstáculos à compreensão de frações na formação de professores

***Resumo:*** Este artigo investiga obstáculos de aprendizagem enfrentados por futuros professores ao resolver tarefas com frações, com foco em obstáculos didáticos e epistemológicos. A análise baseia-se em observações de aulas em um curso universitário de formação docente, centrando-se nas estratégias utilizadas pelos estudantes e nas dificuldades emergentes. Entre os resultados, destacam-se a prevalência do uso mecânico de métodos ensinados anteriormente, a dificuldade em argumentar sem algoritmos, e erros conceituais relacionados ao uso inadequado de benchmarks. Tais dificuldades foram discutidas à luz da Teoria das Situações Didáticas, sendo algumas classificadas como obstáculos epistemológicos, outras como didáticos. O estudo também identifica situações ambíguas, sugerindo a necessidade de integrar conceitos como contrato didático em futuras análises.

***Palavras-chave:*** Obstáculos Epistemológicos. Obstáculos Didáticos. Frações.

**Ana Lúcia Braz Dias**
Central Michigan University
Mount Pleasant, MI — Estados Unidos
0000-0003-0674-0758
dias1al@cmich.edu

**Tony Salvatore Sheikhnavassi**
Central Michigan University
Mount Pleasant, MI — Estados Unidos
0000-0003-0674-0758
sheik1ts@cmich.edu

**Recebido • 20/09/2024**
**Aceito • 08/04/2025**
**Publicado • 10/08/2025**

Editora • Janine Freitas Mota

**ARTIGO**

## Between knowing and teaching: obstacles to understanding fractions in teacher education

***Abstract:*** This article investigates learning obstacles faced by prospective teachers when solving fraction tasks, focusing on didactical and epistemological challenges. The analysis is based on classroom observations in a university-level teacher education course, examining students' strategies and emerging difficulties. Among the findings, we highlight the prevalence of mechanically applying previously taught methods, difficulties in reasoning without algorithms, and conceptual errors related to the inappropriate use of benchmarks. These difficulties are discussed within the framework of the Theory of Didactical Situations, with some classified as epistemological obstacles and others as didactical ones. The study also identifies ambiguous cases, suggesting the need to incorporate concepts such as the didactical contract in future analyses.

***Keywords:*** Epistemological Obstacles. Didactical Obstacles. Fractions.

## Obstáculos didácticos y epistemológicos en la enseñanza de fracciones: perspectivas de un curso para maestros en formación

***Resumen:*** Este artículo investiga los obstáculos de aprendizaje enfrentados por futuros docentes al resolver tareas con fracciones, centrándose en desafíos didácticos y epistemológicos. El análisis se basa en observaciones de clases en un curso universitario de formación docente, examinando las estrategias empleadas por los estudiantes y las dificultades que surgieron. Entre los resultados, se destaca la aplicación mecánica de métodos previamente enseñados, la dificultad para razonar sin algoritmos y errores conceptuales relacionados con el uso inadecuado de referencias comparativas (benchmarks). Estas dificultades se discuten dentro del marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas, clasificándolas como obstáculos epistemológicos o didácticos. El estudio también identifica casos ambiguos, lo que sugiere la necesidad de incorporar conceptos como el contrato didáctico en futuros análisis.

***Palabras clave:*** Obstáculos Epistemológicos. Obstáculos Didácticos. Fracciones.

## 1 Introdução

Compreender os obstáculos de aprendizagem que futuros professores enfrentam ao lidar com conceitos de frações é essencial para aprimorar a formação docente. Em particular, a persistência de hábitos procedimentais e de incompreensões conceituais — apesar da exposição prévia dos estudantes ao tema — sugere que há fatores em jogo que vão além do histórico individual ou da mera cobertura de conteúdos.

Este artigo[1] baseia-se em dados produzidos durante um estudo piloto pré-dissertação, realizado em um curso de formação de professores de Matemática. Embora o estudo piloto tenha sido originalmente concebido para explorar o contrato didático, seu objetivo mais amplo foi examinar fenômenos de sala de aula utilizando todo o aparato conceitual da Teoria das Situações Didáticas (TSD).

Durante duas aulas observadas, centradas em tarefas envolvendo frações, emergiram diversas dificuldades dos estudantes — algumas de natureza procedimental, outras conceitual — que motivaram investigações adicionais. Este artigo toma esses momentos como ponto de partida para abordar um foco analítico diferente, mas relacionado: a modelagem dos obstáculos de aprendizagem com base nas categorias da TSD.

O contrato didático, conforme proposto por Guy Brousseau, refere-se ao conjunto de expectativas implícitas entre professor e estudantes que orientam comportamentos em sala de aula e a interpretação das tarefas. Embora este texto se concentre nos obstáculos, momentos de hesitação ou desalinhamento também podem apontar para deslocamentos ou tensões no contrato.

A pergunta de pesquisa que orientou o estudo é: Que tipos de obstáculos didáticos e epistemológicos podem ser identificados nos raciocínios de futuros professores ao resolver tarefas de frações em um contexto de sala de aula?

Este artigo está organizado da seguinte forma: na Seção 2, discutimos o referencial conceitual sobre obstáculos epistemológicos e didáticos; na Seção 3, revisamos brevemente estudos relevantes acerca da aprendizagem de frações; na Seção 4, descrevemos o contexto e a metodologia do estudo; na Seção 5, apresentamos e analisamos duas situações de sala de aula observadas; e, na Seção 6, oferecemos reflexões finais e indicações para trabalhos futuros.

## 2 Referencial Teórico

Esta seção apresenta os conceitos teóricos que orientam a análise dos episódios em sala de aula. A literatura aqui revisada foi selecionada com base na relevância temática para a identificação e modelagem de obstáculos de aprendizagem no ensino de frações, particularmente aqueles conceituados no âmbito da Teoria das Situações Didáticas (TSD).

### 2.1 Obstáculos ontogênicos, didáticos e epistemológicos

Brousseau (2002) discute o conceito de obstáculos no processo de aprendizagem, especialmente no sistema didático, que inclui as interações entre o professor, os estudantes e o conhecimento ensinado. O autor sugere que os obstáculos à compreensão de determinados conceitos por parte dos estudantes podem surgir de múltiplas causas, tornando difícil atribuir o problema a apenas um componente do processo educativo. Apesar da natureza entrelaçada desses obstáculos, Brousseau propõe que é possível identificar origens específicas por meio da análise de qual parte do sistema professor–estudante–conhecimento precisa ser modificada para superá-los. Ao compreender qual subsistema requer mudança, os educadores podem direcionar

[1] Um resumo expandido deste texto foi publicado nos anais do *6º Fórum Nacional sobre Currículos de Matemática*, realizado em outubro de 2024.

estratégias para o tipo específico de obstáculo.

Brousseau (2002) distingue três fontes de obstáculos no processo de aprendizagem: ontogênicos, didáticos e epistemológicos. Os obstáculos ontogênicos, no âmbito da epistemologia genética, baseiam-se na premissa de que o desenvolvimento cognitivo segue etapas específicas. Obstáculos ontogênicos, nesse contexto, seriam barreiras de desenvolvimento naturalmente presentes devido à idade e ao amadurecimento neurológico do estudante. Os obstáculos didáticos são dificuldades que surgem como consequência das formas pelas quais um conceito tem sido tradicionalmente apresentado ou ensinado. Já os obstáculos epistemológicos estão relacionados à própria natureza do conhecimento, refletindo as dificuldades inerentes à compreensão de determinados conceitos em razão de sua complexidade ou abstração.

Neste artigo, não consideraremos os obstáculos ontogênicos, pois eles costumam estar associados a etapas do desenvolvimento em estudantes mais novos (crianças). Focaremos, em vez disso, nos obstáculos epistemológicos e didáticos, que são mais pertinentes aos futuros professores resolvendo problemas com frações, dado seu grau de maturidade cognitiva e seu conhecimento matemático prévio.

## 2.2 Obstáculos epistemológicos

Guy Brousseau (1933–2024) introduziu o conceito de obstáculo epistemológico — originalmente formulado pelo epistemólogo francês Gaston Bachelard (1884–1962) — ao público da Educação Matemática durante o 28º encontro da Comissão para o Estudo e Aperfeiçoamento do Ensino da Matemática [Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching — CIEAEM], realizado em Louvain-la-Neuve, na Bélgica. Sua conferência foi publicada sete anos depois na revista *Recherches en Didactique des Mathématiques* (Brousseau, 1983), e posteriormente traduzida para o inglês e incluída no livro *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques, 1970–1990* (Brousseau, 2002).

Brousseau (2002) sugere que a construção de significado envolve uma interação contínua entre o estudante e as situações-problema, caracterizada por um processo dialético em que o estudante antecipa e orienta suas próprias ações. Nessa interação, o estudante mobiliza seus conhecimentos prévios, revisando-os, modificando-os, acrescentando elementos ou até mesmo descartando-os, para formar novos entendimentos. O foco principal da Didática é investigar as condições que essas situações ou problemas devem apresentar para favorecer o surgimento, o funcionamento e, eventualmente, a rejeição de concepções sucessivas.

Nessas circunstâncias, o valor didático de um problema depende, de forma significativa, do que o estudante está disposto a enfrentar e do investimento que fará nesse enfrentamento. Depende também da relevância das concepções equivocadas que ele será levado a rejeitar, das consequências previsíveis dessas rejeições, da frequência com que esses erros podem se repetir e do impacto que tais erros provocam.

Por essa razão, os problemas mais valiosos são aqueles que possibilitam ao estudante superar um obstáculo genuíno. É nesse sentido que, ao discutir os problemas, Brousseau optou por aprofundar o conceito de obstáculos na didática.

> Quando começamos a buscar as condições psicológicas nas quais o progresso científico se realiza, logo nos convencemos de que o problema do conhecimento científico deve ser colocado em termos de obstáculos. Não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e a transitoriedade dos fenômenos, nem tampouco de incriminar a fragilidade dos

> sentidos ou da mente humana. É no próprio cerne do ato de conhecer que, por uma espécie de necessidade funcional, surgem lentidão e perturbações. É no ato de conhecer que mostraremos as causas de estagnação e até mesmo de regressão; ali também discerniremos causas de inércia que chamaremos de obstáculos epistemológicos. [...]. Com efeito, conhecemos a partir um saber prévio, quando destruímos um conhecimento mal construído e superamos todos esses obstáculos à espiritualização que residem na própria mente.
>
> A ideia de que partimos do nada ao criar e ampliar nossos conhecimentos só poderia surgir em sistemas culturais baseados na justaposição simples, onde algo que se conhece é imediatamente algo que enriquece. No entanto, quando nossa alma se confronta com todo o mistério da realidade, ela não pode tornar-se ingênua por decreto. É impossível, então, apagar de uma vez por todas cada traço de nosso saber ordinário e cotidiano. Ao contemplarmos a realidade, aquilo que julgamos conhecer muito bem projeta sua sombra sobre aquilo que deveríamos conhecer. Mesmo quando se aproxima pela primeira vez do conhecimento científico, a mente jamais é jovem. Na verdade, ela é muito antiga — tão antiga quanto seus preconceitos. Ao adentrarmos os domínios da ciência, rejuvenescemos em espírito e mente e nos submetemos a uma súbita mutação que deve contradizer o passado. (Bachelard, 2002, p. 24)

Bachelard (2002) esclarece que não está se referindo a desafios ou dificuldades externas, como a complexidade inerente dos fenômenos ou sua natureza fugaz, que podem torná-los difíceis de observar ou compreender. Tampouco está falando sobre as limitações dos sentidos humanos ou do intelecto, que também podem impor desafios à aquisição de conhecimento. Em vez disso, Bachelard está concentrado nos obstáculos que surgem dentro do próprio processo de conhecer. Esses não são barreiras externas, mas internas aos quadros cognitivos e conceituais que utilizamos para entender o mundo. Ele descreve esses obstáculos como surgindo “por uma espécie de necessidade funcional” (Bachelard, 2002, p. 25), o que significa que eles são inerentes à própria estrutura e ao funcionamento de nossos processos de pensamento e de conhecimento.

A frase “conhecemos a partir de um saber prévio” (Bachelard, 2002, p. 25) captura uma ideia central na filosofia de Bachelard: a de que adquirir um novo conhecimento muitas vezes envolve desafiar, revisar ou superar conhecimentos ou crenças já existentes. Nossas compreensões anteriores podem atuar como obstáculos a novos insights, pois moldam a forma como interpretamos novas informações, frequentemente levando-nos a compreender mal ou a resistir a novos conceitos.

> A ideia de obstáculo epistemológico pode ser examinada tanto no desenvolvimento histórico do pensamento científico quanto na prática educativa. Em ambas as áreas, tal exame se revela longe de ser simples. A história, de fato, é intrinsecamente hostil a qualquer juízo normativo. No entanto, somos obrigados a adotar uma perspectiva normativa se quisermos avaliar a eficácia do pensamento. Nem tudo o que encontramos na história do pensamento científico contribui para o desenvolvimento desse pensamento — muito pelo contrário. Há certos tipos de conhecimento que, mesmo sendo corretos, levam pesquisas promissoras a um término prematuro.
>
> Os epistemólogos, portanto, precisam ser seletivos no uso do material que os historiadores fornecem. Devem avaliar esses documentos sob a ótica da razão — e, na verdade, sob a ótica de uma razão desenvolvida — pois é somente agora que podemos realmente julgar os erros do pensamento do passado. [...]
>
> Podemos ver aqui o que distingue a vocação do epistemólogo daquela do

> historiador da ciência. Os historiadores da ciência precisam tomar as ideias como fatos. Já os epistemólogos devem tomar os fatos como ideias e situá-los dentro de um sistema de pensamento. Um fato que toda uma época interpretou de forma equivocada permanece um fato aos olhos dos historiadores. Para os epistemólogos, porém, ele é um obstáculo, um contra-pensamento. (Bachelard, 2002, p. 25)

Essa perspectiva foi criticada na história epistemológica das ciências de Georges Canguilhem. Este argumenta que devemos ter cautela para não nos precipitarmos nem cairmos na armadilha de uma reconstrução lógica que simplifica em excesso a história, fazendo-a parecer transparente e linear. Em vez disso, precisamos reconhecer a profundidade e a complexidade do tempo, com seus múltiplos ritmos sobrepostos de inovação e persistência, bem como suas hesitações, desvios e saltos. Uma história bem elaborada da ciência *nos cura* dessa impaciência ideológica (Gattinara, 2018).

> Enquanto Bachelard era movido por uma espécie de impaciência histórica que o levava a desejar que os momentos do tempo fossem transparentes entre si, de modo que sua opacidade fosse atribuída ao erro e estigmatizada como um obstáculo no caminho da verdade, Canguilhem é impulsionado pela necessidade de restaurar justamente essa opacidade da história, essa "espessura do tempo". (Sertoli, 1983, p. 156)

No entanto, é importante reconhecer que Gaston Bachelard, juntamente com Edwin Arthur Burtt e Georges Canguilhem, desempenhou um papel significativo ao se opor à perspectiva continuísta de George Sarton. Sarton via a Ciência como seguindo uma progressão linear e cumulativa em direção a um conhecimento e compreensão cada vez maiores, acreditando que o desenvolvimento científico é um processo contínuo em que cada geração se apoia nas descobertas e nos insights de seus predecessores. Em contraste, a abordagem de Bachelard se caracteriza por um método dialético, no qual o conhecimento evolui por meio da tensão e da interação entre diferentes ideias, teorias e erros. Esse processo não é linear, mas envolve múltiplos caminhos e revisões, refletindo uma compreensão dinâmica e aberta do progresso científico. Canguilhem reconheceu publicamente sua dívida intelectual com Bachelard desde a década de 1950 (Alfonso-Goldfarb, Ferraz e Beltran, 2006; Gattinara, 2018).

Em vez de considerar os obstáculos epistemológicos como etapas a serem superadas em uma progressão linear rumo a uma compreensão mais *avançada*, podemos entendê-los como partes naturais do desenvolvimento cognitivo e da aprendizagem. Isso implica reconhecer que os estudantes frequentemente possuem concepções prévias ou equívocos que influenciam a maneira como se envolvem com novos conteúdos. Essas compreensões anteriores não são, em si mesmas, *erradas* ou *primitivas*; antes, constituem pontos de partida que refletem o pensamento e as experiências atuais do estudante.

Os profissionais que atuam na formação de professores podem incentivar os futuros professores a compreenderem as razões por trás de certas concepções equivocadas e a valorizar diferentes formas de saber. Isso não significa que todas as ideias sejam igualmente válidas, mas sim que compreender por que as pessoas sustentam diferentes crenças é fundamental para uma aprendizagem profunda. Em vez de enxergar o conhecimento como uma progressão unidirecional em direção a um estado ideal, os professores podem promover a flexibilidade epistêmica — a capacidade dos estudantes de reconhecer e trabalhar dentro de diferentes quadros de referência ou paradigmas do conhecimento. Essa abordagem encoraja os estudantes a perceberem o conhecimento como algo que pode mudar e evoluir à luz de novas informações e perspectivas.

> A própria noção de obstáculo está em processo de formação e diversificação. Não é fácil apresentar generalizações pertinentes sobre esse tema; é preferível realizar esses estudos caso a caso. Paralelamente ao trabalho de registrar e descrever obstáculos significativos à constituição dos conceitos, estão se desenvolvendo estudos que se dedicam a investigar as características do funcionamento do conhecimento, simultaneamente como suporte e como obstáculo (de forma alternada ou dialética). (Brousseau, 2002, p. 84).

Depois que Brousseau introduziu pela primeira vez o conceito de obstáculos na Teoria das Situações Didáticas, a noção de obstáculo tornou-se mais sutil e diversificada. Seguindo a recomendação de Brousseau de evitar generalizações amplas e, em vez disso, estudar os obstáculos caso a caso, pesquisadores passaram a se concentrar na identificação de obstáculos epistemológicos no desenvolvimento histórico de diversos conceitos matemáticos (Sierpinska, 1985; Gras e Totohasina, 1995; Spagnolo, 1995; Costa, 2009; Ferreira, 2014; Hassayoune e Rahim, 2015; Santos, Oliveira e Santos, 2024).

Duroux (1983) buscou oferecer algumas reflexões para ajudar a esclarecer o conceito de *obstáculo* e diferenciá-lo da noção de *dificuldade*, tornando-o mais aplicável e útil no contexto da análise didática.

Duroux (1983) explica que o processo de aquisição de conhecimento por parte do estudante envolve a institucionalização[2] desse conhecimento, quando seu estatuto cognitivo é explicitamente estabelecido e reconhecido. Esse conhecimento se torna significativo quando é utilizado pelos estudantes para resolver problemas de forma autônoma, livre de vieses instrucionais ou culturais. Por meio de discussões e resolução de problemas, os estudantes desenvolvem o que se chama de *concepções* — entendimentos localizados que se aplicam a situações específicas.

À medida que as concepções dos estudantes interagem com o ambiente de aprendizagem, que pode ser físico, virtual ou teórico, essas concepções frequentemente revelam limitações e precisam evoluir. Idealmente, a concepção de um estudante se ampliaria ao longo do tempo, de modo a abarcar todo o conjunto de conceitos relacionados. Entretanto, na prática, múltiplas concepções, por vezes conflitantes, costumam se desenvolver em torno do mesmo conceito, cada uma cobrindo diferentes aspectos do campo conceitual. Essa situação pode levar à reestruturação de concepções já existentes e à introdução de novas. Analisar esses deslocamentos e conflitos é, na visão de Duroux, justamente o ponto em que a ideia de obstáculo se torna particularmente útil, ajudando a compreender os desafios do processo de aprendizagem. (Duroux, 1983)

Para Duroux (1983), aquilo que definimos como um obstáculo deve atender aos seguintes critérios:

1. Um obstáculo é um *conhecimento* que funciona como tal sobre um conjunto de situações e para certos valores das variáveis dessas situações, também chamado de concepção. Não é uma dificuldade ou uma ausência de conhecimento. Por exemplo, a incapacidade de lidar com quantidades negativas isoladas ou a dificuldade em atribuir sentido a quantidades negativas isoladas não são obstáculos, pois representam uma falta de conhecimento, e não uma concepção sobre números negativos. Por outro lado, a dificuldade em *unificar a reta numérica*, isto é,

[2] "Situações de institucionalização são aquelas pelas quais o estatuto cognitivo de um conhecimento ou de um fragmento de conhecimento é fixado de maneira convencional e explícita. A institucionalização é interna se um grupo estabelece suas convenções livremente, por meio de um processo arbitrário que o torna um sistema quase isolado. É externa se adota suas convenções a partir de uma cultura" (Brousseau, 2002, p. 215.). "O reconhecimento 'oficial' do objeto de conhecimento pelo estudante, e da aprendizagem do estudante pelo professor, é um fenômeno social muito importante e uma fase essencial do processo didático. Esse duplo reconhecimento é o objeto da *institucionalização*." (Brousseau, 2002, p. 237.)

compreender a reta numérica como uma representação contínua e coerente de todos os números reais, incluindo positivos, negativos e o zero, pode ser reformulada como uma concepção ou fragmento de conhecimento — a concepção de que os números negativos são, de algum modo, separados ou diferentes dos positivos — que é eficaz em determinado número de situações, e que, portanto, pode ser considerada um obstáculo.

2. Um obstáculo conduz a erros específicos, identificáveis e analisáveis quando aplicado a outras situações que estão fora de seu domínio de validade.

3. Um obstáculo é um conhecimento *estável*, no seguinte sentido: os estudantes têm dificuldade em abandonar aquilo que *sabem*, mesmo quando não é aplicável. O custo de *adaptação*[3] é elevado: em vez de rejeitar seu conhecimento estável, porém incorreto, os estudantes podem tentar adaptá-lo a novas situações, ainda que ele não se encaixe. Essa tentativa de adaptação pode levar a soluções excessivamente complexas ou complicadas. Esse é o sintoma clássico do estudante que *complica* quando poderia *simplificar*: ele tenta forçar sua concepção a funcionar em situações nas quais ela não é apropriada, em vez de adotar uma abordagem mais simples, que seria possível na ausência do obstáculo.

4. Um obstáculo só pode ser superado em situações que exijam sua rejeição, e esse processo de rejeição é *essencial* para o desenvolvimento de novos conhecimentos. “Por exemplo, a aquisição do conceito de convergência de uma sequência numérica ocorrerá contra a concepção de que todo número tem uma única representação decimal. O próprio retorno à concepção-obstáculo será parte integrante do novo conhecimento” (Duroux, 1983, p. 54). O conhecimento de que $0.\overline{9}$ tem uma única representação decimal pode dificultar a aceitação de que 0,999... = 1. Ao confrontar repetidamente o conhecimento-obstáculo relacionado à expansão decimal não terminante e compreender melhor esse tema, os estudantes podem chegar a entender de forma mais profunda por que 0,999... = 1.

> Muitas vezes, é entre as “dificuldades” que se deve buscar indícios de um obstáculo, mas, para satisfazer a primeira condição, que diz que um obstáculo é um fragmento de conhecimento, o pesquisador deve se esforçar para reformular a “dificuldade” que está estudando em termos não de ausência de conhecimento, mas de conhecimento (falso, ou mesmo incompleto etc.). (Brousseau, 2002, p. 94)

Em relação a obstáculos epistemológicos e o currículo, é importante perguntar: Qual é a importância dessas teorizações para o currículo de Matemática? Em seu prelúdio ao capítulo de Brousseau sobre obstáculos de aprendizagem, os editores de *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques, 1970-1990* escrevem: “Esse reconhecimento da existência de obstáculos intrinsecamente relacionados à natureza do conhecimento levanta a questão das características das situações que permitem superá-los” (Balacheff *et al. in* Brousseau, 2002, p. 76). Essa percepção destaca a importância de planejar cuidadosamente situações de aprendizagem dentro do currículo de matemática que não apenas apresentem conhecimento aos estudantes, mas também os confrontem de maneira estratégica com esses obstáculos epistemológicos. No referencial de Brousseau, esses obstáculos não são meramente barreiras a serem evitadas; pelo contrário, são componentes essenciais do processo de aprendizagem. Situações didáticas eficazes orientam os estudantes por esses desafios de forma

[3] Na teoria do desenvolvimento cognitivo de Jean Piaget, a adaptação envolve ajustar os modelos mentais para se adequar a novas experiências. Isso geralmente ocorre por meio da assimilação — integração de novas informações aos esquemas já existentes — ou da acomodação — modificação dos esquemas existentes para incorporar novas informações. No entanto, essa adaptação não requer, necessariamente, a rejeição ativa do conhecimento anterior. O conhecimento antigo pode continuar a existir ao lado do novo, mesmo que não seja mais utilizado.

a favorecer a reconstrução de seu conhecimento em novos contextos.

Superar um obstáculo de conhecimento é um processo complexo, pois o obstáculo está intimamente ligado ao próprio conhecimento que ele bloqueia. Assim como o conhecimento, um obstáculo é composto por objetos, relações, modos de compreender, previsões e resultados — tanto esperados quanto inesperados. É difícil livrar-se de um obstáculo porque ele tende a se transformar apenas ligeiramente, mantendo-se preso a padrões familiares. Para realmente superar um obstáculo, os estudantes precisam enfrentar novas situações que o obstáculo não consiga tratar ou às quais não possa se adaptar com facilidade. Esses novos desafios irão, gradativamente, enfraquecer o obstáculo, tornando-o obsoleto ou equivocado, até que ele não consiga mais se sustentar. Superá-lo envolve um processo passo a passo de repensar, descartar ou desmontar o obstáculo. Importante destacar que essa superação requer tanto esforço quanto a aquisição de novos conhecimentos — trata-se de uma interação contínua entre o estudante e o objeto de estudo. Essa observação é fundamental para definir o que constitui um verdadeiro problema: uma situação que favorece e encoraja esse tipo de interação dinâmica.

> O conhecimento, as pessoas e seu meio sendo o que são, é inevitável que essas interações levem a concepções que sejam "errôneas" (ou corretas localmente, mas não de forma geral). No entanto, essas concepções são controladas por condições da interação que podem ser mais ou menos modificadas. É objeto da didática compreender essas condições e utilizá-las. Essa observação tem consequências importantes, sobretudo para o ensino: se desejamos desestabilizar uma noção enraizada, é vantajoso que o estudante invista suficientemente suas concepções em situações — que sejam numerosas e significativas para ele — e, sobretudo, que apresentem condições informacionais suficientemente diferentes para que um salto qualitativo se torne necessário. (Brousseau, 2002, p. 85)

Assim, integrar essas teorizações ao currículo de matemática requer que os curriculistas criem ativamente ambientes e situações didáticas que incentivem os estudantes a refletir, negociar e resolver obstáculos epistemológicos. Essa abordagem desloca o papel do professor de mero transmissor de conteúdo para facilitador de situações de aprendizagem nas quais os estudantes se engajam em ações, elaboram formulações, validam sua compreensão e, por fim, institucionalizam o conhecimento.

### 2.3 Obstáculos didáticos

Os obstáculos didáticos têm origem nas escolhas de estratégias de ensino feitas dentro de um sistema ou programa educacional para apresentar ou introduzir determinado conceito (Brousseau, 2002). Essas escolhas didáticas podem ser atuais ou oriundas do passado. Em outras palavras, às vezes a estratégia de ensino ou a representação escolhida para apresentar um conceito ocorreu em uma série ou etapa anterior, mas seus efeitos continuam a acompanhar os estudantes em fases posteriores da aprendizagem. Na compreensão de Cortina, Višňovská e Zúñiga (2014), "falamos em obstáculos didáticos quando metáforas, representações e outros recursos instrucionais introduzidos pelos educadores resultam em ideias dos estudantes que são inconsistentes com objetivos matemáticos mais complexos de aprendizagem" (p. 3).

Por exemplo, Cinzia Bonotto (Bonotto, 1993; Pitkethly e Hunting, 1996) e um grupo de professores do Ensino Fundamental examinaram como os números racionais eram ensinados a estudantes de 8 a 11 anos em escolas primárias italianas. Eles constataram que o conceito de fração como parte de um todo era o foco predominante no ensino dos números racionais. O grupo acreditava que essa interpretação se consolidava porque possibilitava o uso de atividades como recortar, dobrar e desenhar, que forneciam uma representação tangível das frações.

As evidências indicaram que essa escolha de abordagem de ensino resultava em uma compreensão limitada das frações entre as crianças. Elas entendiam a fração como um rótulo associado a um contexto visual ou manipulativo. As crianças não compreendiam as frações como entidades ou representações que pudessem existir em diferentes contextos e, ainda assim, serem unificadas dentro de um conceito único. Essa perspectiva restrita também afetava os próprios professores, que, assim como os alunos da pesquisa, tinham dificuldade em compreender frações como números. Ao analisar as razões dessas dificuldades, constatou-se que a ênfase esmagadora na interpretação de fração como parte de um todo, presente em exemplos e exercícios, promovia estereótipos, como a crença de que uma fração é sempre uma parte menor que o inteiro.

Sobre os obstáculos didáticos e o currículo, é pertinente considerar que, ao contrário dos obstáculos ontogênicos e epistemológicos, que são inerentes à natureza do conhecimento e ao desenvolvimento cognitivo, os obstáculos didáticos surgem da forma como o conteúdo é ensinado. Isso significa que podem ser atenuados ou até completamente evitados por meio de um planejamento curricular cuidadoso. Os responsáveis pelo desenho curricular devem considerar como certas estratégias de ensino, a sequência dos conteúdos e a apresentação dos conceitos matemáticos podem, de fato, facilitar ou obstruir a aprendizagem. Para Cortina, Višňovská e Zúñiga (2014),

> [é] importante destacar que há uma diferença significativa entre os obstáculos de origem ontogenética e epistemológica, por um lado, e aqueles de origem didática, por outro. Ao contrário dos dois primeiros, os obstáculos de origem didática podem, e devem, ser evitados. O desafio pedagógico é encontrar estratégias de ensino para determinados conceitos matemáticos de modo que o conhecimento em desenvolvimento dos estudantes não venha, desnecessariamente, a prejudicar sua aprendizagem futura. (p. 3)

A teorização dos obstáculos didáticos tem implicações significativas para o planejamento curricular. Diferentemente dos obstáculos ontogênicos e epistemológicos, que são inerentes à natureza do conhecimento e ao desenvolvimento cognitivo, os obstáculos didáticos decorrem da forma como o conteúdo é apresentado. Isso significa que podem ser mitigados ou mesmo completamente evitados mediante um planejamento atento do currículo. Os elaboradores curriculares precisam refletir sobre como certas formas de apresentar conceitos matemáticos podem, na prática, estar criando novos obstáculos.

## 3 Revisão da literatura

A literatura revisada nesta seção foi selecionada como parte de um processo de pesquisa de doutorado e tem o propósito de informar o estudo atual, em vez de oferecer um mapeamento exaustivo do campo. Em consonância com a distinção de Maxwell (2006) entre revisões *sobre* e revisões *para* a pesquisa, as fontes foram escolhidas com base em sua relevância conceitual para a análise de obstáculos de aprendizagem no ensino de frações, particularmente aqueles modelados a partir da Teoria das Situações Didáticas (TSD).

### 3.1 Obstáculos epistemológicos na aprendizagem de frações

Os obstáculos epistemológicos na aprendizagem de frações foram identificados na literatura acadêmica? Com base em uma síntese de cinco dissertações ou teses nas quais pesquisadores identificaram obstáculos à aprendizagem de frações, José e Vizolli (2022) situaram os obstáculos encontrados nesses estudos no referencial teórico de Bachelard sobre o desenvolvimento do espírito científico. Esse referencial inclui a experiência primeira, o conhecimento geral, o conhecimento unitário e pragmático, bem como obstáculos de natureza substancialista, animista e verbal.

No entanto, é importante lembrar que Bachelard originalmente formulou essas hipóteses para o desenvolvimento do espírito científico, e não do matemático. Bachelard escreve:

> Para completar nossa tarefa aqui, precisaríamos, além disso, estudar a formação do espírito matemático sob o mesmo ponto de vista crítico. No entanto, isso será tratado em outro livro. Essa divisão é possível, acreditamos, porque o crescimento do espírito matemático é muito diferente daquele do espírito científico que se esforça por compreender os fenômenos físicos. Com efeito, a história da matemática é maravilhosamente regular. Existem períodos em que ela se interrompe. Contudo, não há períodos de erro. Nenhum dos argumentos que estamos apresentando neste livro tem relação com o conhecimento matemático. Nossos argumentos aqui dizem respeito apenas ao conhecimento do mundo objetivo. (Bachelard, 2002, p. 32)

Com efeito, Brousseau escreve que “[a] pesquisa sobre obstáculos epistemológicos em Matemática certamente requer um esforço de invenção, pois o conceito de Bachelard é pouco adaptado a este domínio” (Brousseau, 2002, p. 93). Ele prossegue afirmando que o conceito pode, ainda assim, revelar-se frutífero para o ensino, desde que, entre outras condições: os obstáculos em questão sejam genuinamente identificados na história da matemática; tenham sido rastreados nos modelos espontâneos dos estudantes; e as condições pedagógicas para a superação desses obstáculos possam ser estudadas e resultar em um currículo passível de avaliação.

Em um estudo voltado a identificar obstáculos de aprendizagem que afetam a compreensão dos estudantes sobre frações e suas operações, Unaenah, Suryadi e Turmudi (2023) analisaram os erros cometidos por 22 estudantes do 5º ano ao resolverem quatro problemas de adição e subtração de frações — duas questões de preenchimento e dois problemas com palavras (enunciados). Posteriormente, foram realizadas entrevistas clínicas com os estudantes. Os pesquisadores concentraram-se na identificação de obstáculos ontogênicos, didáticos e epistemológicos nos erros dos estudantes e, a partir dessa análise, desenvolveram uma trajetória hipotética de aprendizagem. Um erro comum foi o uso da multiplicação cruzada para adicionar ou subtrair frações. Embora os pesquisadores tenham reconhecido que os estudantes haviam aprendido a multiplicação cruzada em aula para divisão de frações, eles categorizaram esse erro como um obstáculo epistemológico, e não didático. Atribuíram o erro à dificuldade dos estudantes em aplicar o conhecimento de forma adequada em diferentes contextos, sugerindo que a multiplicação cruzada, embora correta para divisão, não se aplica à adição e subtração de frações.

Entretanto, discordamos dessa classificação como obstáculo epistemológico, pois esse erro não se alinha ao desenvolvimento histórico do conceito de frações, nem é intrínseco à evolução do próprio conceito. Os pesquisadores mencionaram a definição de obstáculo epistemológico de Duroux, que ocorre quando um conhecimento válido em um contexto se torna inválido em outro. No entanto, a multiplicação cruzada não é verdadeiramente conhecimento; é apenas um procedimento. O erro provavelmente decorre do ensino da divisão de frações sem compreensão conceitual subjacente, sendo a multiplicação cruzada tratada como um método mecânico que fornece respostas corretas, mas sem qualquer entendimento conceitual associado.

Gostaríamos de enfatizar que o obstáculo identificado não está genuinamente enraizado no desenvolvimento histórico da matemática, nem foi rastreado nos modelos espontâneos dos estudantes — que são condições apontadas por Brousseau para o uso produtivo do conceito de obstáculo epistemológico no ensino. Esses erros parecem emergir de práticas instrucionais, e não de uma evolução conceitual natural ou do pensamento intuitivo dos estudantes, o que ressalta a necessidade de um foco mais aprofundado na construção da compreensão conceitual, e não apenas na competência procedimental.

Hariyani e colaboradores (Hariyani *et al.*, 2022) realizaram um estudo de caso envolvendo 30 estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental de duas escolas diferentes em Bandung, na Indonésia. Foram aplicadas doze questões aos estudantes, com foco em conceitos e operações com frações. Essas questões foram elaboradas para identificar os obstáculos de aprendizagem enfrentados pelos estudantes na compreensão dos conceitos de fração, na realização de operações de adição e subtração e na resolução de problemas. As perguntas foram adaptadas de um instrumento diagnóstico de obstáculos de aprendizagem em Matemática, publicado pelo Departamento de Educação deles. Também foram conduzidas entrevistas para fornecer informações adicionais sobre os obstáculos encontrados pelos estudantes. Os autores classificaram a principal dificuldade enfrentada pelos estudantes ao comparar duas frações com denominadores diferentes como um obstáculo epistemológico. A maioria deles comparava as frações focando-se apenas nos denominadores, pressupondo que a comparação de frações era similar à comparação de números naturais. Segundo os autores, isso constitui um obstáculo epistemológico, pois envolve a aplicação de um conhecimento válido em um contexto — ordenar números naturais — a um contexto no qual ele não é válido — comparar frações. Em outra linha de pesquisa, essa dificuldade seria identificada como um exemplo do *viés do número natural*, que é descrito como a aplicação (inadequada) de características dos números naturais em tarefas envolvendo números racionais (Ni e Zhou, 2005; Van Hoof, Verschaffel e Van Dooren, 2015)

Hariyani e colaboradores (Hariyani *et al.*, 2023) realizaram outro estudo com o objetivo de investigar os obstáculos de aprendizagem que estudantes do Ensino Fundamental enfrentam na compreensão de conceitos de frações, desta vez durante o ensino remoto. A pesquisa envolveu 38 estudantes do 5º ano de escolas primárias em Bandung e Pekanbaru, na Indonésia. O objetivo era identificar obstáculos ontogênicos, epistemológicos e didáticos, além de oferecer subsídios para que os professores pudessem elaborar estratégias de ensino mais eficazes. Este estudo de caso qualitativo envolveu três principais métodos de produção de dados: testes, entrevistas e análise curricular. Os testes incluíram cinco questões discursivas elaboradas para identificar obstáculos de aprendizagem. Além disso, foram realizadas entrevistas com cinco estudantes, para investigar seus processos de pensamento e compreender como o conceito de frações lhes havia sido ensinado. O estudo também analisou o currículo e os livros didáticos utilizados pelos estudantes, a fim de identificar lacunas nos materiais de ensino. O estudo identificou os obstáculos epistemológicos como um dos principais desafios enfrentados pelos estudantes na compreensão de frações. O obstáculo apontado pelos pesquisadores como sendo de origem epistemológica estava relacionado à dificuldade dos estudantes em compreender a equivalência de frações em diferentes contextos. Por exemplo, ao serem apresentados a um desenho de 12 laranjas, das quais três estavam destacadas, os estudantes identificaram corretamente a fração como $\frac{3}{12}$, mas não reconheceram que essa fração também representava $\frac{1}{4}$. De forma semelhante, quando viram um retângulo dividido em 16 partes congruentes, com quatro partes pintadas, os alunos afirmaram que a fração era $\frac{4}{16}$, sem perceber que era equivalente a $\frac{1}{4}$. Essa dificuldade foi atribuída ao conhecimento limitado dos estudantes em contextos específicos. No entanto, não consideramos que este seja um caso de *aplicação de um conhecimento válido em um contexto a outro onde ele não é válido* e, por essa razão, não temos certeza se essa situação deveria ser classificada como um obstáculo epistemológico. Parece mais provável que o erro decorra da regra excessivamente simplificada de que o denominador representa o número total de partes, e o numerador representa o número de partes pintadas.

Na realidade, esse erro específico — estudantes identificarem frações como $\frac{3}{12}$ sem reconhecer sua equivalência com $\frac{1}{4}$ — pode surgir de uma combinação de fatores, em vez de se encaixar de forma simples em uma única categoria, como a de obstáculo epistemológico.

Do ponto de vista ontogênico, esse erro pode decorrer do estágio de desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes. O conceito de equivalência, especialmente no caso das frações, exige um raciocínio abstrato que pode não estar plenamente desenvolvido em crianças mais novas. O foco nas frações como partes isoladas de um todo — por exemplo, *3 partes pintadas de 12* — reflete uma compreensão superficial, sem a capacidade de relacionar essa representação a princípios matemáticos mais amplos, como a equivalência. Isso pode apontar para uma limitação cognitiva própria dessa fase de aprendizagem.

Do ponto de vista didático, como já comentamos anteriormente, se o ensino enfatiza excessivamente regras procedimentais, como *o denominador é o número total de partes e o numerador é o número de partes pintadas*, sem explorar relações mais profundas como a equivalência, os estudantes podem não desenvolver a flexibilidade necessária para reconhecer que $\frac{3}{12}$ ou $\frac{4}{16}$ também correspondem a $\frac{1}{4}$. Isso sugere uma lacuna no planejamento instrucional — os estudantes estão sendo treinados para aplicar uma regra, mas não para compreender seus fundamentos conceituais.

Novamente, embora os pesquisadores tenham classificado isso como um obstáculo epistemológico, não estamos totalmente convencidos. Nos obstáculos epistemológicos, o problema geralmente surge quando os estudantes aplicam um conhecimento que é válido em um contexto, mas não em outro. Neste caso, os estudantes não parecem estar aplicando inadequadamente um conhecimento entre contextos, mas sim demonstrando uma compreensão incompleta de frações. Eles compreendem a mecânica de identificar as partes, mas ainda não assimilaram o conceito de equivalência de frações. Isso sugere mais uma lacuna conceitual do que um equívoco decorrente da transferência de conhecimentos entre contextos.

O próprio Brousseau escreveu um trecho para ilustrar o conceito de obstáculo epistemológico (Brousseau, 2002). O exemplo dado é o uso exclusivo de frações unitárias no antigo Egito — frações cujo numerador é 1, como $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$. Esse exemplo é descrito como *conhecimento fossilizado*, significando que ele representa uma forma de pensar que era útil e válida em seu contexto histórico, mas que não é mais relevante na prática matemática contemporânea. O trecho observa que esse exemplo específico pode não ter interesse didático na contemporâneidade, porque as condições que tornavam essa abordagem lógica no antigo Egito provavelmente desapareceram. No entanto, Brousseau utiliza o exemplo como um exercício hipotético para mostrar como determinadas práticas históricas, embora obsoletas, podem ser analisadas a fim de compreender como poderiam ter funcionado como obstáculos epistemológicos na aprendizagem. Em essência, o exemplo mostra como algo que foi, em certo momento, um método útil — frações unitárias — poderia, posteriormente, impedir o progresso na compreensão de conceitos mais avançados sobre frações.

Acreditamos que a história das frações unitárias egípcias realmente não seja o melhor ponto de partida para buscar obstáculos epistemológicos, já que muitas de suas restrições e métodos não são mais utilizados. Embora grande parte da Matemática moderna tenha sido moldada por desenvolvimentos europeus, muitos conceitos fundamentais, incluindo as frações, têm origens não europeias (Joseph, 2011). As frações foram amplamente utilizadas em civilizações antigas, como a chinesa, a egípcia e a árabe, muito antes de serem plenamente integradas ao pensamento matemático europeu (Berlinghoff e Gouvêa, 2002; Sun e Zeng, 2023). Ao examinar as dificuldades históricas que a Europa enfrentou para aceitar e incorporar as frações, podemos identificar obstáculos epistemológicos importantes. Compreender essas barreiras históricas pode nos ajudar a reconhecer obstáculos semelhantes no trabalho contemporâneo dos estudantes com conceitos de fração. A história epistemológica das frações também pode revelar como aspectos desse conceito, que em determinado momento eram estranhos ou rejeitados em contextos europeus, acabaram se tornando aceitos. Essa perspectiva histórica pode iluminar o que pode constituir situações didáticas eficazes para o ensino de frações nos dias de hoje.

Retomando nossa pergunta no início desta seção, ao considerar se os pesquisadores têm sido bem-sucedidos em identificar obstáculos epistemológicos na aprendizagem de frações, embora estudiosos tenham tentado classificar certas dificuldades — como o uso inadequado da multiplicação cruzada e a falha em reconhecer a equivalência de frações — como obstáculos epistemológicos, acreditamos que essas classificações podem não estar totalmente alinhadas com o conceito original de Brousseau. Brousseau (2002) enfatizou que verdadeiros obstáculos epistemológicos deveriam estar enraizados no desenvolvimento histórico da matemática ou poder ser rastreados nas estratégias espontâneas dos estudantes. No entanto, muitos dos desafios identificados nesses estudos parecem decorrer de métodos instrucionais e da compreensão conceitual incompleta, mais do que da aplicação inadequada de conhecimentos de um contexto a outro — que é justamente o que caracteriza um obstáculo epistemológico.

Entre os desafios revisados aqui, o candidato mais provável a ser considerado um obstáculo epistemológico é aquele em que os estudantes mobilizam raciocínios válidos para números naturais, mas incorretos quando lidam com frações. Esse fenômeno pode ser encontrado em uma literatura que não se refere diretamente aos obstáculos epistemológicos. Como já mencionamos anteriormente, ele tem sido documentado como o *víes do número natural* (Van Hoof, Verschaffel e Van Dooren, 2015). Além disso, Kieren, Behr e Carss (1986) destacaram

> a compreensão que as crianças têm dos números naturais e os esquemas que desenvolveram para operar com números naturais exercem efeitos dominantes sobre seu trabalho com frações comuns e decimais. Diante de um problema em que, por exemplo, 4 deve ser dividido por 12, os alunos podem realizar diversas transformações do problema para obter uma resposta em número natural. (p. 179)

Isso reflete uma aplicação inadequada de conhecimentos entre contextos, o que se encaixa na definição de obstáculo epistemológico.

### 3.2 Obstáculos didáticos na aprendizagem de frações

Se olharmos de forma crítica para a literatura sobre dificuldades de aprendizagem com frações, veremos que muitas dessas dificuldades dizem respeito às representações das frações e não ao conceito de fração em si — ver, por exemplo, Hecht e Vagi (2012), Hansen, Jordan e Rodrigues (2017), Kaminski (2018), Namkung e Fuchs (2019), Sidney, Thompson e Rivera (2019), Singha *et al.* (2021). Por exemplo, na introdução ao conceito de frações em seu experimento, Hamdan e Gunderson (2017) apresentam a fração dizendo: “As frações têm uma parte de cima e uma parte de baixo, como este número, $\frac{1}{4}$. Esta é uma fração. Ela tem um número em cima e um número embaixo” (p. 590). Essa introdução se concentra nos aspectos notacionais das frações, e não no seu significado conceitual.

Raymond Duval é conhecido por suas pesquisas sobre o papel das representações no ensino de Matemática. Ele argumenta que, quando a instrução se concentra principalmente em ensinar os estudantes a manipular representações, isso pode prejudicar sua compreensão dos conceitos matemáticos subjacentes (Duval, 2006). Esse fenômeno é particularmente recorrente no ensino de frações. Muitos livros didáticos introduzem frações por meio de recursos visuais, como diagramas de retângulos ou círculos divididos em partes iguais, frequentemente usando exemplos como pizzas para estabelecer conexões com experiências do cotidiano. Além disso, o foco instrucional costuma se deslocar rapidamente para a notação fracionária, enfatizando a mecânica da representação antes que os estudantes desenvolvam uma compreensão conceitual sólida das frações como quantidades.

O *processo de dupla contagem* refere-se a um método frequentemente utilizado no ensino de frações por meio de representações visuais, no qual a fração é determinada contando dois aspectos da divisão (Jahn *et al*., 1999). Especificamente, as ilustrações sempre mostram a divisão do todo com todas as partes explicitamente desenhadas, de modo que cada linha ou marca de divisão aparece no diagrama. Utilizando esse modelo visual, os estudantes podem nomear a fração aplicando uma regra de dupla contagem:

- O denominador é determinado contando o número total de partes em que o todo foi dividido.
- O numerador corresponde à contagem de quantas dessas partes foram selecionadas ou *retiradas*.

Esse processo, embora seja direto, estimula os estudantes a se concentrarem na estrutura superficial das frações, a divisão e a contagem das partes, sem necessariamente promover uma compreensão mais profunda das frações como razões, divisões ou números. Ele simplifica a identificação da fração a um procedimento de contagem, sem abordar a profundidade conceitual do que as frações representam, o que pode se tornar um obstáculo didático à medida que os estudantes avançam em sua compreensão das frações.

Outra autora que denunciou os efeitos prejudiciais do foco excessivo em diagramas nas introduções ao tema das frações foi Daphne Kerslake. Ela desenvolveu uma sequência de ensino composta por seis sessões de 40 minutos cada, que foi testada por vários professores com suas próprias turmas. Após uma análise da implementação da sequência, ela concluiu que: "Mais importante ainda, parece que a dependência de diagramas inibe a percepção da ideia de que frações são números" (Kerslake, 1986, p. 97).

## 4 Metodologia

O estudo baseou-se em notas de observação coletadas durante um estudo piloto pré-dissertação realizado pelo segundo autor em um curso de métodos de ensino de Matemática para futuros professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, em uma universidade pública na região Centro-Oeste dos Estados Unidos. O estudo piloto serviu tanto como exercício de formação metodológica quanto como produção inicial de dados para um projeto de dissertação mais amplo sobre contratos didáticos.

O curso no qual o estudo foi conduzido faz parte de uma sequência de três disciplinas de Matemática obrigatórias para licenciandos em Educação Infantil e Ensino Fundamental em uma universidade pública na região Centro-Oeste dos Estados Unidos. Os estudantes geralmente se matriculam nessa disciplina durante o segundo ou terceiro ano, após terem cursado disciplinas sobre números naturais e sobre frações, decimais e raciocínio proporcional. Embora seja um curso com foco em conteúdo, ele foi concebido para modelar práticas de ensino eficazes, alinhadas à preparação de futuros professores. Durante as sessões observadas, estavam presentes aproximadamente de 21 a 28 estudantes, organizados em sete grupos pequenos de três a quatro pessoas cada. A população estudantil é composta, em sua maioria, por futuros professores que buscam certificação para lecionar da Educação Infantil e Anos Iniciais do

Ensino Fundamental.

Os dados foram produzidos por meio de observação não participante. O segundo autor permaneceu na sala de aula como observador silencioso ao longo de três sessões, registrando notas detalhadas sobre as interações em grupo dos estudantes, bem como sobre os questionamentos e intervenções do formador. Embora entrevistas com estudantes e com o formador também tenham sido realizadas durante o estudo piloto, este artigo se concentra exclusivamente nas notas de observação como dados para análise. Essas notas foram posteriormente relidas e codificadas pelos dois autores para identificar momentos em que o raciocínio dos estudantes revelava possíveis obstáculos didáticos ou epistemológicos, que então foram interpretados à luz da Teoria das Situações Didáticas.

Para os fins deste artigo, analisamos dois episódios que surgiram durante aulas sobre frações. O curso foi ministrado em uma sala de aprendizagem interativa, equipada com oito mesas de grupo, quadros brancos e telas compartilhadas. Os estudantes trabalhavam colaborativamente em pequenos grupos em tarefas conceituais de comparação de frações, selecionadas a partir do livro-texto do curso — *Mathematics for Elementary teachers with activities* [Matemática para professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental com atividades] (Beckmann, 2018).

## 5 Resultados e análise

As situações descritas nesta seção foram observadas durante uma aula sobre comparação de frações. Os estudantes estavam divididos em sete grupos, cada um com até quatro participantes. O formador propôs atividades selecionadas do livro-texto adotado no curso, *Mathematics for Elementary teachers with Activities*, de Sybilla Beckmann (2018). Os estudantes trabalhavam de forma colaborativa dentro de seus grupos para chegar a uma resposta coletiva. Enquanto eles trabalhavam, o formador circulava pela sala, escutando as discussões e, ocasionalmente, interagindo com os grupos. Cada grupo tinha a tarefa de escrever sua resposta coletiva no quadro branco designado. Um estudante de cada grupo ficava responsável por apresentar a resposta do grupo para a turma.

As atividades apresentadas aqui tinham dois objetivos principais. Um deles era levar os estudantes a refletir conceitualmente sobre as frações, concentrando-se no tamanho e nas propriedades dos números, em vez de recorrer apenas a métodos mecânicos já conhecidos. O outro objetivo estava alinhado à abordagem do livro-texto, que incentiva a aprendizagem de diferentes maneiras de resolver problemas. Como eles são futuros professores, é importante que estejam preparados para reconhecer e compreender as diversas estratégias que seus próprios estudantes poderão utilizar. Conhecer vários métodos por si mesmos os ajudará nessa tarefa. Embora o livro-texto inclua uma seção que ensina diretamente diversos métodos para comparar frações, há outra seção ao final com atividades de classe (*Class Activities*). O formador do curso pode optar por utilizar essas atividades como uma situação adidática, isto é, sem instrução direta. Neste caso, o objetivo era que os estudantes descobrissem, por conta própria, diferentes métodos de comparação.

### 5.1 Situação A

Os estudantes receberam a tarefa de comparar as frações $\frac{55}{6}$ e $\frac{33}{4}$. Após concluírem as discussões em grupo, o apresentador do Grupo 2 explicou a abordagem utilizada: "*Determinamos que, para compará-las, primeiro precisaríamos encontrar denominadores comuns*".

O formador então perguntou à turma se concordavam com esse método. A maioria dos grupos havia adotado uma abordagem similar, exceto o Grupo 5. O formador exibiu então o

Educação Matemática Debate
v. 9, n. 18, p. 1-23, ago. 2025

quadro branco do Grupo 5, e o apresentador desse grupo explicou: "*Nós transformamos as frações em números mistos e eliminamos as frações impróprias*". O formador sintetizou ambas as abordagens, destacando a lógica por trás do método do Grupo 5: "*Os números mistos têm inteiros diferentes, então, claramente, um deles é maior*".

### 5.2 Análise da Situação A

Embora a maioria dos estudantes tenha abordado o problema buscando denominadores comuns, o Grupo 5 utilizou uma estratégia diferente ao converter as frações impróprias em números mistos. O formador destacou a eficiência desse método, já que os números inteiros distintos permitiam uma comparação imediata e clara.

Não dispomos de dados detalhados sobre como esses futuros professores aprenderam frações no Ensino Fundamental. No entanto, é provável que os métodos tradicionais tenham enfatizado a importância de ter denominadores iguais para comparar frações. Isso pode explicar por que a maioria dos grupos recorreu automaticamente à busca de denominadores comuns, em vez de explorar outras estratégias de comparação, como a conversão em números mistos.

Essa dependência dos denominadores comuns, embora matematicamente válida, pode representar um obstáculo didático, no qual métodos instrucionais ou hábitos desenvolvidos na educação básica limitam a flexibilidade dos estudantes na resolução de problemas. Nesse caso, a ênfase nos denominadores comuns pode ter restringido os estudantes a ponto de não explorarem estratégias alternativas, e muitas vezes mais simples, como comparar primeiro os números inteiros.

### 5.3 Situação B

Em uma nova atividade de classe proposta pelo livro-texto, os estudantes foram convidados a comparar frações sob restrições específicas: eles não podiam usar frações equivalentes com denominadores comuns, converter as frações em decimais, utilizar números mistos ou desenhar diagramas (Figura 1).

Atividade de Classe 2P: Comparando Frações por Raciocínio

CCSS CCSS SMP2, SMP3, 4.NF.2

Use raciocínio diferente de encontrar denominadores comuns, multiplicação cruzada ou conversão para decimais para comparar os tamanhos (=, < ou >) dos seguintes pares de frações:

$$\frac{27}{43} \quad \frac{26}{45}$$
$$\frac{13}{25} \quad \frac{34}{70}$$
$$\frac{17}{18} \quad \frac{19}{20}$$
$$\frac{9}{40} \quad \frac{12}{44}$$
$$\frac{51}{53} \quad \frac{65}{67}$$
$$\frac{13}{25} \quad \frac{5}{8}$$
$$\frac{37}{35} \quad \frac{27}{25}$$

Figura 1: Atividade de classe (Beckmann, 2018, p. CA-38)

O formador solicitou que os estudantes iniciassem a primeira comparação em seus grupos. No entanto, houve pouca discussão, o que levou o formador a perguntar: *"Não estou ouvindo nenhuma discussão",* ao que um estudante respondeu: *"Estamos pensando"*. O formador então deu a seguinte dica: *"Esta é a mais fácil. Pensem no tamanho das partes e na quantidade de partes"*.

Essa orientação estimulou as discussões nos grupos. Enquanto observava os grupos, o formador parou no Grupo 3, em que um estudante expressou dificuldade em saber por onde começar: "Não temos certeza de por onde começar". O formador respondeu com uma pergunta orientadora: "O que me diz o tamanho das partes, o numerador ou o denominador?". O estudante respondeu: *"O denominador"*, e o formador argumentou: *"Isso, usem essa ideia para tentar resolver"*.

No Grupo 1, outro estudante expressou insegurança sobre como explicar seu raciocínio: "Não tenho certeza de como escrever isso". O formador incentivou o estudante a explicar seu pensamento: "O que você quer dizer?". *O estudante argumentou:* "*As partes são maiores e tem mais delas"*. O instrutou incentivou: *"Ótimo, escreva isso. Mostre por quê"*. O estudante então escreveu no quadro branco do grupo: $\frac{1}{43} > \frac{1}{45}$, seguido de "$\frac{27}{43} > \frac{26}{45}$ porque $27 > 26$".

Durante o momento de socialização na aula, o quadro branco do Grupo 5 foi projetado para que todos os grupos pudessem ver (Figura 2).

$$\frac{21.5}{43} \qquad \frac{22.5}{45}$$

$$27 - 21.5 = 5.5 \qquad 26 - 22.5 = 3.5$$

Mais longe do referencial 1/2

Figura 2: Trabalho do Grupo 5 para comparar 27/43 e 26/45

O formador então fez uma pergunta: *"Isso está correto ou há algum problema?"*. Ele prosseguiu, indicando um erro conceitual: *"O que há de errado em usar 5,5 e 3,5?"*. E seguiu com a explicação: "*A distância de $\frac{27}{43}$ em relação a $\frac{1}{2}$ não é 5,5. É $\frac{5,5}{43}$. E, de forma semelhante, $\frac{3,5}{45}$. Vocês não podem esquecer o tamanho das partes*".

### 5.4 Análise da Situação B

Essa observação em sala de aula serve como exemplo de diversos conceitos centrais abordados pela Teoria das Situações Didáticas, especialmente a hesitação dos estudantes em iniciar a tarefa. Essa relutância pode advir do desconforto em se afastar de métodos de resolução de problemas já familiares ou das rotinas habituais da sala de aula. Embora pudéssemos analisar essa situação à luz da noção de contrato didático — tema que exploraremos em um artigo futuro —, neste arrtigo concentramos a atenção em possíveis obstáculos didáticos e epistemológicos. Por exemplo, a dificuldade do estudante do Grupo 1 em articular seu raciocínio e sua hesitação em registrá-lo por escrito podem indicar um obstáculo didático. Estudantes acostumados a abordagens algorítmicas, nas quais passos claros são fornecidos, frequentemente apresentam dificuldade quando precisam expressar seu raciocínio matemático de forma verbal ou escrita sem esse tipo de orientação estruturada. No entanto, isso também pode ser interpretado como uma adaptação a um contrato didático diferente daquele ao qual estão habituados.

Vamos nos concentrar no uso incorreto, pelo Grupo 5, das distâncias em relação a $\frac{1}{2}$. Ao passar dos números naturais para as frações, ocorre uma mudança fundamental na forma como pensamos sobre os *tamanhos dos grupos*. Por exemplo, nos números naturais, se escrevemos

234 na notação expandida, ele pode ser decomposto em 2 grupos de 100, 3 grupos de 10 e 4 unidades. Com as frações, uma abordagem similar pode ser aplicada. Por exemplo, $\frac{27}{43}$ pode ser pensado como 27 grupos de quadragésimos-terceiros. Nesse caso, ao lidarmos com partes de $\frac{1}{43}$, estamos tratando essas partes como unidade de medida.

Outra possível explicação é que os estudantes têm pouca experiência em pensar nas frações como uma unidade de medida e só as concebem no contexto parte-todo. Pode ser difícil afirmar com certeza quais são os obstáculos epistemológicos que os estudantes enfrentam em relação às frações, mas, a menos que eles vejam as frações em diferentes contextos, pode ser difícil utilizá-las de forma adequada em situações variadas.

Um obstáculo epistemológico presente aqui surge quando os estudantes aplicam incorretamente uma técnica adequada para comparar distâncias entre números naturais às frações, nas quais o tamanho da unidade mudou. Nos números naturais, pode-se comparar as diferenças diretamente — por exemplo, 27 e 26 —, mas com frações como $\frac{27}{43}$ e $\frac{26}{45}$, o denominador altera o tamanho do grupo, e, portanto, as distâncias precisam ser ajustadas para considerar essa nova unidade. O uso incorreto, pelo Grupo 5, das distâncias em relação a $\frac{1}{2}$ reflete esse viés — embora eles tenham identificado corretamente ½ como um bom referencial e percebido que ambas as frações eram maiores que $\frac{1}{2}$, não avaliaram corretamente as distâncias em relação a esse referencial. Eles não levaram em conta que as distâncias deveriam ser relativas ao tamanho do grupo (partes de $\frac{1}{43}$ ou de $\frac{1}{45}$), e não apenas à diferença absoluta entre os numeradores.

Outro problema epistemológico similar é o fato de que eles tentaram usar um referencial desde o início. Embora esse seja um método viável, ele não é muito eficiente neste caso. Uma vez que o formador apontou que seria necessário considerar os denominadores ao determinar a distância em relação ao referencial, os estudantes ainda ficariam com a tarefa de explicar essas distâncias: $\frac{5,5}{27}$ e $\frac{3,5}{26}$. Eles se veriam novamente no ponto de partida, precisando comparar duas frações outra vez. O estudante do Grupo 1 apresentou uma abordagem mais eficaz: *"Tem mais partes e as partes são maiores"*. Traduzindo isso para um raciocínio algébrico, poderíamos inferir que $\frac{27}{43} > \frac{26}{43} > \frac{26}{45}$. A primeira desigualdade se sustenta pelo número de partes e a segunda, pelo tamanho das partes. Foi exatamente isso que o estudante do Grupo 1 estava indicando. O problema epistemológico aqui é que os estudantes continuam tentando encontrar um método sistemático, e isso os impede de perceber que poderiam construir um argumento mais direto, como o que o estudante do Grupo 1 conseguiu formular.

Para facilitar uma compreensão mais aprofundada do erro do Grupo 5 sem dizer diretamente o que estava errado, o formador poderia ter apresentado outro par de frações, como $\frac{7}{10}$ e $\frac{19}{32}$. Aplicando o método do grupo, que consistia em calcular a distância de ambas as frações ao referencial $\frac{1}{2}$, eles concluiriam, de forma equivocada, que $\frac{19}{32}$ é maior que $\frac{7}{10}$. Isso poderia levá-los a revisar seu método e tentar descobrir o que havia de errado com ele. O formador provavelmente optou por não conduzir os estudantes por um exemplo semelhante devido a restrições de tempo e ao fato de que esse método de comparação pelo referencial não se aplicaria de maneira eficaz ao par de frações em questão. No entanto, ao apontar o erro, o formador garantiu que os estudantes reconhecessem as limitações de seu método, abrindo caminho para abordagens mais corretas e conceituais no futuro.

Há muitas hipóteses que poderiam ser formuladas a partir deste exemplo: Seria um obstáculo epistemológico porque os estudantes estão tentando generalizar em excesso o método do referencial para um problema que poderia ser resolvido de forma mais simples? Ou poderia ser um obstáculo didático, caso eles tenham aprendido previamente o método do referencial, e seu ensino direto tenha limitado a capacidade dos estudantes de pensar de maneira mais flexível? Nesse caso, o ensino direto do método poderia ter sido um desserviço, impedindo que os alunos descobrissem estratégias mais eficientes por conta própria.

Outra possível interpretação de por que o Grupo 5 escolheu o método do referencial pode estar relacionada ao contrato didático (Brousseau, 2002). Nesse caso, os estudantes podem ter tentado usar um método que acreditavam ser aquele que o professor esperava que aplicassem, em vez de explorar estratégias alternativas. No entanto, como este artigo se concentra em obstáculos didáticos e epistemológicos, e não no contrato didático, não nos aprofundaremos nesse aspecto aqui.

Em um curso de um semestre, com um livro-texto adotado e restrições significativas de tempo, os formadores enfrentam diversos desafios que podem impedi-los de oferecer aos estudantes oportunidades para construir seu próprio conhecimento. A estrutura do curso frequentemente prioriza a cobertura de uma ampla variedade de tópicos em um período curto, deixando pouco espaço para uma exploração mais aprofundada ou uma aprendizagem reflexiva. Os formadores costumam estar vinculados ao conteúdo e ao ritmo definidos pelo livro-texto adotado, o que pode restringir ainda mais sua flexibilidade para criar situações em que os estudantes possam se engajar em uma aprendizagem mais significativa e independente.

## 6 Conclusões e considerações finais

O estudo apresentado neste artigo examinou os obstáculos de aprendizagem enfrentados por futuros professores durante dois episódios em sala de aula envolvendo tarefas de comparação de frações. A análise revelou um padrão de dependência persistente de estratégias procedimentais — como a busca automática por denominadores comuns — mesmo quando havia métodos mais intuitivos ou eficientes disponíveis. Os estudantes também apresentaram dificuldades conceituais, incluindo a aplicação inadequada de referenciais e hesitação ao serem solicitados a explicar seu raciocínio sem recorrer a algoritmos. Essas observações foram interpretadas à luz da Teoria das Situações Didáticas e classificadas, sempre que possível, como obstáculos didáticos ou epistemológicos.

Os achados estão em consonância com a literatura prévia sobre como os obstáculos didáticos podem emergir do excesso de ênfase em representações ou regras no ensino inicial (Bonotto, 1993; Duval, 2006; Cortina, Višňovská e Zúñiga, 2014). Eles também dialogam com pesquisas sobre o *víes do número natural* (Van Hoof, Verschaffel e Van Dooren, 2015) e sobre a tensão entre o conhecimento intuitivo e o conhecimento institucionalizado (Brousseau, 2002).

O estudo destaca a complexidade de modelar os obstáculos de aprendizagem enfrentados por futuros professores ao resolver tarefas com frações. Embora muitas dificuldades tenham sido classificadas de forma preliminar como obstáculos epistemológicos ou didáticos, no âmbito da Teoria das Situações Didáticas (TSD), algumas situações resistiram a uma classificação clara. Essa ambiguidade sugere que pode ser necessário adotar uma abordagem mais flexível, possivelmente integrando outros conceitos da TSD, como o contrato didático. Uma limitação do estudo é que ele observou apenas uma parte das aulas sobre frações. Observar mais encontros, cobrindo toda a sequência de ensino do tema, poderia ter oferecido pistas sobre como os estudantes foram ensinados ao longo do curso, ajudando, potencialmente, a esclarecer os casos em que as interpretações permaneceram indefinidas.

Essa ambiguidade sugere que pode ser necessário adotar uma abordagem mais flexível, possivelmente integrando outros conceitos da TSD, como o contrato didático. Ela também convida a uma reflexão mais ampla sobre como os próprios materiais de ensino podem contribuir para o surgimento desses obstáculos.

Em particular, os obstáculos didáticos observados neste estudo parecem estar estreitamente ligados ao livro-texto utilizado no curso. Estratégias como comparar denominadores ou recorrer a frações de referência, embora matematicamente válidas em contextos específicos, foram aplicadas pelos estudantes mesmo quando eram inadequadas ou levavam a erros. Essas técnicas, frequentemente enfatizadas no livro-texto, pareciam moldar a compreensão dos estudantes sobre o que seria considerado uma ação Matemática aceitável. Em vez de serem invenções espontâneas dos estudantes, tais estratégias podem refletir a influência dos materiais curriculares e da cultura instrucional. Nesse sentido, os achados dizem respeito não apenas aos processos individuais de aprendizagem, mas também a como o currículo — entendido em uma perspectiva mais ampla, que inclui livros-texto, normas de sala de aula e expectativas institucionais — contribui para a persistência e a reprodução de certas formas de raciocínio. Essa perspectiva dialoga com estudos curriculares que procuram interrogar, em vez de prescrever, as estruturas e pressupostos incorporados à Matemática escolar.

**Conflitos de Interesse**

A autoria declara não haver conflitos de interesse que possam influenciar os resultados do estudo apresentado no artigo.

**Declaração de Disponibilidade dos Dados**

Os dados produzidos e analisados no artigo serão disponibilizados mediante solicitação à autoria.

**Nota**

A revisão textual (correções gramatical, sintática e ortográfica) deste artigo foi custeada com verba da *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais* (Fapemig), pelo auxílio concedido no contexto da Chamada 8/2023.

**Referências**

ALFONSO-GOLDFARB, Ana Maria; FERRAZ, Márcia Helena Mendes; BELTRAN, Maria Helena Roxo. A historiografia contemporânea e as ciências da matéria: uma longa rota cheia de percalços. *In*: PEREIRA, Ana Leonor; PITA, João Rui. (Coord.). *Rotas da natureza: cientistas, viagens, expedições, instituições*. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra, 2006, p. 107-111.

BACHELARD, Gaston. *The formation of the scientific mind: a contribution to a psychoanalysis of objective knowledge*. Translated by Mary McAllester Jones. Manchester: Clinamen Press, 2002.

BECKMANN, Sybilla. *Mathematics for elementary teachers with activities*. New York: Pearson, 2018.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. *Math through the ages: a gentle history for teachers and others*. Farmington: Oxton House Publishers, 2002.

BONOTTO, Cinzia. Origini concettuali di errori che si riscontrano nel confrontare numeri decimali e frazioni. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, v. 16, n. 1, p. 9-45, 1993.

BROUSSEAU, Guy. Les obstacles épistémologiques et les problemes en Mathematiques.

*Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 4, n. 2, p. 165-198, 1983.

BROUSSEAU, Guy. *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques, 1970-1990*. Edited and translated by BALACHEFF, Nicolas; COOPER, Martin; SUTHERLAND, Rosamund; WARFIELD, Virginia.Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

CORTINA, José Luis; VIŠŇOVSKÁ, Jana; ZÚÑIGA, Claudia. Equipartition as a didactical obstacle in fraction instruction. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics*, v. 14, n. 1, p. 1-18, 2014.

COSTA, Letícia Vieira Oliveira. *Números reais no Ensino Fundamental: alguns obstáculos epistemológicos*. 2009. 368f. Disseretção (Mestrado em Educação). Universidade de São Paulo. São Paulo. https://doi.org/10.11606/D.48.2009.tde-30082010-085854

DUROUX, Alain. La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure. *Petit x*, 3, p. 43-67, 1983.

DUVAL, Raymond. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, v. 61, n. 1-2, p. 103-131, 2006.

FERREIRA, Edinalva Rodrigues. *Ensino de frações na Educação de Jovens e Adultos: obstáculos didáticos e epistemológicos*. 2014. 184f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

GATTINARA, Enrico Castelli. The relationship between History and Epistemology in Georges Canguilhem and Gaston Bachelard. *Transversal*, n. 4, p. 14-26, 2018. https://doi.org/10.24117/2526-2270.2018.i4.04

GRAS, Regis; TOTOHASINA, André. Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques a la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 15, n. 1, p. 49-95, 1995.

HAMDAN, Noora; GUNDERSON, Elizabeth A. The number line is a critical spatial-numerical representation: Evidence from a fraction intervention. *Developmental Psychology*, v. 53, n. 3, p. 587-596, 2017. https://doi.org/10.1037/dev0000252

HANSEN, Nicole; JORDAN, Nancy C.; RODRIGUES, Jessica. Identifying learning difficulties with fractions: a longitudinal study of student growth from third through sixth grade. *Contemporary Educational Psychology*, v. 50, p. 45-59, 2017. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2015.11.002

HARIYANI, Mimi; HERAWATI, Herawati; ANDRIANI, Melly; SUHERMAN, Suherman. Students' learning obstacles in understanding of fraction concept during online learning. *Journal of Didactic Mathematics*, 4, n. 2, p. 58-64, 2023. https://doi.org/10.34007/jdm.v4i2.1849

HARIYANI, Mimi; HERMAN, Tatang; SURYADI, Didi; PRABAWANTO, Sufyani. Exploration of student learning obstacles in solving fraction problems in Elementary School. *International Journal of Educational Methodology*, v. 8, n. 3, p. 505-515, 2022. https://doi.org/10.12973/ijem.8.3.505

HASSAYOUNE, Slimane; RAHIM, Kouki. La difficile genèse de la pensée algébrique: ruptures et obstacles épistémologiques. *In*: *Actes du Espace Mathematique Francophone*. Algérie, 2015, p. 386-402.

HECHT, Steven A.; VAGI, Kevin J. Patterns of strengths and weaknesses in children's knowledge about fractions. *Journal of Experimental Child Psychology*, 111, n. 2, p. 212-229, 2012. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2011.08.012

JAHN, Ana Paula; SILVA, Maria José Ferreira; SILVA, Maria Célia Leme; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. Lógica das equivalências. In: *Anais da 22ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação*. Caxambu, 1999, p. 1-18.

JOSÉ, Wander Alberto; VIZOLLI, Idemar. Obstáculos epistemológicos inerentes ao conceito de fração: um estado do conhecimento. *Rematec*, v. 17, p. 48-66, 2022. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n.p48-66.id499

JOSEPH, George Gheverghese. *The crest of the peacock: non-european roots of Mathematics*. 3 ed. Princeton: Princeton University Press, 2011.

KAMINSKI, Jennifer A. Effects of visual representations on fraction arithmetic learning. *In: Proceedings of the 40th Annual Meeting of the Cognitive Science Society*. Madison, 2018, p. 1-6.

KERSLAKE, Daphne. *Fractions: children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in Secondary Mathematics Project*. Windsor, Berkshire. 1986.

KIEREN, Thomas E.; BEHR, Merlyn J. Fractions: rational numbers. In: In: CARSS, Marjorie. (Ed.). *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematical Education*. Boston: Birkhausen, 1986, 179-180.

MAXWELL, Joseph A. Literature reviews of, and for, educational research: a commentary on Boote and Beile's "Scholars before researchers". *Educational Researcher*, v. 35, n. 9, p. 28-31, 2006. https://doi.org/10.3102/0013189X035009028

NAMKUNG, Jessica; FUCHS, Lynn. Remediating difficulty with fractions for students with Mathematics learning difficulties. *Learning Disabilities*, v. 24, n. 2, p. 36-48, 2019. https://doi.org/10.18666/LDMJ-2019-V24-I2-9902

NI, Yujing; ZHOU, Yong-Di. Teaching and learning fraction and rational numbers: the origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40, n. 1, p. 27-52, 2005. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3

PITKETHLY, Anne; HUNTING, Robert. A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 30, n. 1, p. 5-38, 1996. https://doi.org/10.1007/BF00163751

SANTOS, João; OLIVEIRA, Naralina; SANTOS, Marcílio. Aprendizagem de limites e continuidade em funções de uma variável real: um olhar para os obstáculos epistemológicos. *Quadrante*, 33, n. 1, p. 72-96, 2024. https://doi.org/10.48489/quadrante.33083

SERTOLI, Giuseppe. Epistemologia e storia delle Scienze in Georges Canguilhem. *Nuova Corrente*, v. 30, n. 90-91, p. 101-171, 1983.

SIDNEY, Pooja G.; THOMPSON, Clarissa A.; RIVERA, Ferdinand D. Number lines, but not area models, support children's accuracy and conceptual models of fraction division. *Contemporary Educational Psychology*, v. 58, p. 288-298, 2019. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2019.03.011

SIERPINSKA, Anna. Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6, n. 1, p. 5-67, 1985.

SINGHA, Parmjit; HOONA, Teoh Sian; NASIR, Nurul Akmal Md; CHEONG, Tau Han; RASID, Syazwani Mr; HOONG, Joseph Boon Zik. Obstacles faced by students in making sense of fractions. *The European Journal of Social and Behavioural Sciences*, v. 30, n. 1, p. 34-51, 2021. https://doi.org/10.15405/ejsbs.287

SPAGNOLO, Filippo. *Obstacles épistémologiques: le postulat de eudoxe-archimede*. 1995. 170f. Thèse (Doctorat en Didactique des Mathématiques). Université Bordeaux-I. Bordeaux.

SUN, Xinyang; ZENG, Qingtao. The history of fractions and teaching insights. *Journal of Education and Educational Research*, 3, n. 1, p. 93-96, 2023. https://doi.org/10.54097/jeer.v3i1.8199

UNAENAH, Een; SURYADI, Didi; TURMUDI. Students' learning obstacles on fractions in elementary school. *In*: *Proceedings of the International Conference on Education 2022*. Amsterdam: Atlantis Press, 2023, p. 148-157. https://doi.org/10.2991/978-2-38476-020-6_16

VAN HOOF, Jo; VERSCHAFFEL, Lieven; VAN DOOREN, Wim. Inappropriately applying natural number properties in rational number tasks: characterizing the development of the natural number bias through Primary and Secondary Education. *Educational Studies in Mathematics*, 90, n. 1, p. 39-56, 2015. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-015-9613-3