10.46551/emd.v9n18a06 ISSN 2526-6136

Educação Matemática Debate

Fração, mostra a tua cara!

Resumo: Apresentam-se ideias fundamentais de uma proposta didática para o ensino de frações, baseada em pesquisa desenvolvimental. A fundamentação teórica critica o uso excessivo de modelos geométricos, cuja transposição para a realidade se mostra desafiadora. Em contrapartida, encontra apoio teórico na Educação Matemática Realista e na pesquisa desenvolvimental de Freudenthal. Como parte dos procedimentos de pesquisa, propuseram-se aos estudantes situações-problema realistas, envolvendo objetos reais inteiros e partes especiais deles, permitindo-lhes desenvolver estratégias de solução por meio de reflexões e discussões. Como resultados, surgiram o uso de conceitos e estratégias com significado; números fracionários expressando quantidades e colocados de modo lógico na reta numérica, com múltiplas representações para cada um, e a compreensão informal da densidade desse conjunto de números na reta.

Palavras-chave: Números. Fração. Realidade. Modelos.

Nilza Eigenheer Bertoni
Universidade de Brasília
Brasília, DF — Brasil
0000-0002-4191-9457
nilza.bertoni@gmail.com

Ana Lúcia Braz Dias
Central Michigan University
Mount Pleasant, MI — Estados Unidos
0000-0003-0674-0758
dias1al@cmich.edu

Recebido • 15/08/2024
Aceito • 07/03/2025
Publicado • 10/08/2025

Editora • Janine Freitas Mota

ARTIGO

Fractions, show your true colors

Abstract: We present fundamental ideas for a proposal for teaching fractions. The theoretical foundation focuses on the critique of the overemphasized use of geometric models, which are commonly found but difficult to correspond into reality. In contrast, we find theoretical support in Realistic Mathematics Education and Freudenthal's developmental research. As part of the research procedures, we proposed to students realistic problem situations involving real whole objects and special parts of them, allowing students to develop solution strategies through reflection and discussion. We observed the emergence of meaningful concepts and strategies; fractions expressing quantities and being logically placed on the number line, with multiple representations for each; and informal understanding of the density of this set of numbers on the number line.

Keywords: Fractions. Representations. Reality. Numbers.

Fracción, muestra tu cara

Resumen: Presentamos una propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones basada en la investigación desarrollativa. La teoría critica el uso excesivo de modelos geométricos, comunes pero difíciles de aplicar en la realidad. En su lugar, nos apoyamos en la Educación Matemática Realista y la investigación de Freudenthal. Como parte de la investigación, propusimos a los estudiantes situaciones problemáticas realistas con objetos enteros y partes de ellos, permitiéndoles desarrollar estrategias de solución mediante reflexión y discusión. Como resultados, observamos conceptos y estrategias significativas; fracciones colocadas lógicamente en la recta numérica, expresando cantidades con múltiples representaciones; y la densidad de este conjunto de números en la recta.

Palabras clave: Fracciones. Plantillas. Realidad. Números.

"A falha das melhorias instrucionais baseadas em pesquisas em se expandirem com sucesso é um dos desafios mais angustiantes que a pesquisa educacional enfrenta"
Catherine Lewis e Rebecca Perry (2017, p. 261)

1 Introdução

Para uma de nós, autoras, o ensino e a aprendizagem das frações têm-se constituído em estudo-pesquisa em elaboração nos últimos trinta anos (Bertoni, 2004, 2008, 2009). Para a outra, é objeto de frustração no ensino em um programa de formação de professores. A resiliência da primeira pode ser atribuída a alguns fatores. O primeiro deles, a demanda de órgãos públicos e empresas privadas por módulos concernentes ao assunto, integrando projetos de apoio ao Ensino Fundamental; o segundo, focos próprios sucessivos de interesse nessa pesquisa, como o contexto histórico (Bertoni e Fiorentini, 1996; Bertoni, 2005), a construção do conceito de número fracionário (Bertoni, 2008), a articulação das frações-parte à percepção de um conjunto infinito de números, quantificadores de coleções formadas por objetos inteiros, ou por partes deles oriundas de partições equitativas, ou ambos. Um terceiro fator da persistência é o surgimento de novas tendências para a abordagem do tema: os cinco significados de número fracionário (Behr *et al*., 1983), a coordenação de unidades, a sequência numérica fracionária conectada e o esquema fracionário iterativo (Hackenberg, 2007; Olive e Steffe, 2001; Steffe, 2001), além do ensino integrado de fração/decimal/porcentagem (Lappan *et al.*, 2002, 2004; Lamon, 2012, 2017)[1].

Estudamos essas tendências, mas elas não se tornaram focos de nossa pesquisa, por constatarmos que o que queríamos era uma formação forte e realista do conceito de fração, simultânea a de número fracionário. Na tendência dos cinco significados, já era assumido que se tratava de números. Um dos significados, o de quociente, já havia se constituído em pesquisas que realizamos; os demais nos pareceram que podiam ser tratados como aplicações. Já a proposta de integrar o estudo de frações ao de decimais e porcentagens nos pareceu complicadora e desnecessária aos nossos propósitos, visto que havíamos conseguido um bom conhecimento sobre o tema e sua didática, com base na concepção parte-todo, desenvolvida genericamente em contexto diferenciado do até então.

Aliado a esses, há um forte e frustrante fator subjetivo — a constatação de que, nessas décadas, pouco ou nada mudou no ensino de frações, e que os estudantes têm as mesmas dificuldades de antes (Gabriel *et al*., 2023; Hansen, Jordan e Rodrigues, 2017; Namkung e Fuchs, 2019; Singha *et al.*, 2021).

A segunda autora foi introduzida em pesquisa em 1986 pela primeira autora, que à época era sua professora de graduação. Hoje, é professora doutora e, como parte de suas funções na *Central Michigan University,* dá aulas para estudantes de graduação em um curso que as/os certificará como professoras/professores do 3º ao 6º ano do Ensino Fundamental. Ao se sentir frustrada com o desempenho das/dos estudantes, a segunda autora mostrou à primeira resultados de testes em que suas estudantes representavam $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{8}$ com inteiros de tamanhos diferentes e *partes*[2] (terços e oitavos) aproximadamente iguais (Figura 1), ou com tanto o inteiro quanto as partes representadas sem atenção alguma ao tamanho (área ou comprimento), proporção ou congruência (Figura 2).

A resposta da primeira autora veio logo: "*Modelo ruim, Ana Lúcia. Funciona, em parte, para quem já sabe. Descritivo e limitadíssimo*". Ana Lúcia ficou surpresa. "*Modelo ruim? Mas ele não está lá em todos os livros didáticos?*". Daí começou uma conversa e nova colaboração que deu origem a este artigo.

Nos livros didáticos, como os de Dante e Viana (2021) e de Silveira (2021),

[1] Um resumo expandido deste texto foi publicado nos anais do *6º Fórum Nacional sobre Currículos de Matemática*, realizado em outubro de 2024.
[2] Será usado o termo *partes* para se referir ao tipo de fração unitária (meios, terços, quartos etc.), ou seja, a um resultante da divisão equitativa do inteiro.

Educação Matemática Debate
v. 9, n. 18, p. 1-24, ago. 2025

encontramos as mesmas representações abstratas para introdução e apoio ao desenvolvimento do tema, a mesma abundante terminologia, as mesmas técnicas operacionais que encontrávamos antes de todas as pesquisas mencionadas terem sido feitas. E mais, os estudantes não transferem com facilidade relações entre as partes de um círculo e as partes encontradas em contextos de vivência (Pires, 2004).

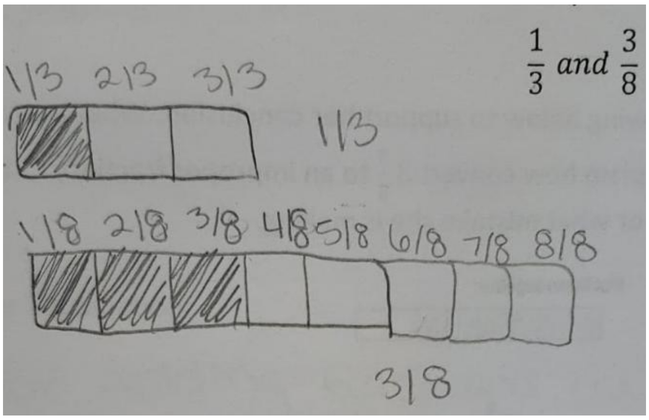

Figura 1: Representação com inteiros de tamanhos diferentes e partes aproximadamente iguais (Acervo próprio)

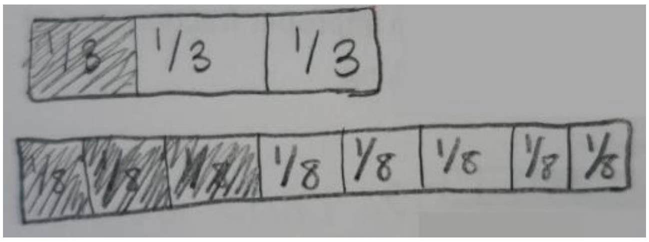

Figura 2: Representação com inteiros e partes sem considerar o tamanho (Acervo próprio)

Reconhecemos que alguns autores didáticos apresentam ilustrações da realidade — como um prato com três quartos de pizza — talvez esperando que os estudantes percebam que há relações entre as figuras planas divididas com o mundo real. Todavia, esses desenhos funcionam mais como representantes de fachada, ou uma lembrança ocasional, ficando a impressão de que o importante mesmo é *o conteúdo de Matemática escolar que se produz* nas figuras geométricas, isto é, terminologias, simbolismos, técnicas operatórias. Também registramos a presença das representações em livros de educadores matemáticos.

Alguns livros, como o de Ripoll *et al.* (2016), têm exacerbado esse desequilíbrio: apresentam os *flashes* de frações na vida, ao mesmo tempo em que desenvolvem extenso tratamento às propriedades das figuras geométricas, avançando em aspectos de modelos, múltiplas divisões equitativas — algumas inimagináveis e até incogitáveis na realidade; reversibilidade nas relações unidade com formas/nomes/símbolos de uma ou mais de suas partes equitativas. Esse desdobramento faz submergir a presença das frações na realidade, aparecendo apenas para expressar nomes dessas partes geométricas.

Com essas considerações, assumimos como objetivo a identificação de fração como um número, usando como recurso divisões equitativas de um ou mais objetos do mundo real. Nosso foco estará na emersão do atributo de expressar quantidades da realidade que elas portam e que afloram no processo de aprendizagem, conferindo-lhes um caráter de número; na familiaridade dos estudantes em reconhecer relações numéricas entre elas, usando abstrações mentais e não tão somente verificação de tamanhos de peças geométricas; em conhecer o conjunto infinito de números que formam, o qual amplia o dos números naturais, e é denso na reta. E, ainda, perceber nele o fato de a divisão entre dois números ser sempre possível, isto é, existir um número, dentro do conjunto, que será o resultado dessa divisão. O tema frações equivalentes

Educação Matemática Debate
v. 9, n. 18, p. 1-24, ago. 2025

será abordado, o qual explicita o número fracionário como o substrato comum a cada uma dessas classes. Consideramos necessário que o estudante tenha a percepção disso.

2 A problemática: ausência de realidade e da essência numérica — espaço dos representantes superdimensionado

De modo intermitente, os estudos sobre frações no currículo da fase inicial da Educação Básica têm abordado dois temas: *se* e *como* as frações devem ser ensinadas. Nossa posição alinha-se à de Peter Hilton, pronunciada no *IV International Congress on Mathematical Education* (ICME IV), em que ele defendeu que, apesar de que certamente se deveria ensinar frações como parte do currículo elementar, elas não deveriam ser ensinadas da forma como foram e ainda são ensinadas (Hilton, 1983).

E que forma seria essa? De forma abrupta, nos livros didáticos, aparecem círculos ou tiras retangulares divididas em partes iguais (equitativas), do tipo setores de círculos ou retângulos menores. Cada figura completa, antes de ser dividida, é chamada de *todo* ou *inteiro*. É a primeira vez que os estudantes se deparam com tal situação.

As partes recebem nomes e signos numéricos, definidos de acordo com o número de partes em que o *todo* foi dividido, surgindo denominações como *metade, um terço, um quarto, um quinto* e assim por diante. Os termos de terminação *avos* aparecem nesse momento, conforme a proposta, ou após a apresentação dos primeiros signos. Para apresentar esses últimos, geralmente, as propostas solicitam que os estudantes pintem algumas das partes, contíguas ou não, contem quantas foram pintadas, quantas eram no total e coloquem esses resultados um sobre o outro, separados por um traço horizontal (o resultado da Figura 1).

Como disse um estudante de 4ª série, ao ser perguntado o porquê de ele considerar as frações o mais difícil em Matemática:

> Porque a gente tem que fazer umas coisas lá, aí tem que pintar, aí quando pinta, aí os resto lá eu não sei não. Por causa que pinta aí tem que ficar fazendo um bocado de número lá do de branco e do pintado (Em Santos, 2006, n. p.).

Por exemplo, ao dividir o círculo em duas metades, atribui-se, como referido, o nome *metade* ou *meio,* representado pelo signo $\frac{1}{2}$, acompanhado da palavra certa para expressá-lo. Segue-se, ordenadamente, o mesmo processo para a divisão da figura em três, quatro, cinco, ..., onze, doze... partes *iguais*. Essas propostas pedagógicas assumem que, desse modo, os estudantes terão aprendido nomes e signos para todas as *frações* — nomenclatura que começa a aparecer insidiosamente, referindo-se tanto às partes como à sua representação numérica. Segue-se uma terminologia extensa: *fração, numerador, denominador, própria, imprópria, aparente, mista*, todas apoiadas nas figuras utilizadas e nos signos atribuídos.

Ou seja, a fração é *própria, aparente* ou *imprópria*, dependendo do número de partes pintadas ou sombreadas: se esse número for menor, igual ou múltiplo, ou maior e não múltiplo que o número total de partes no inteiro. A categoria de frações aparentes conduz a dizer, de um modo um tanto apressado, que todo número natural é também uma fração. Já o caso em que há mais partes pintadas — ou a serem consideradas — que o total previsto na divisão da figura gera sempre algum desconforto: como representar partes em número maior do que as que apareceram na divisão do círculo?[3].

[3] Em um estudo com crianças do 4º ano, "apesar de Joe ter indicado o palito hipotético que seria dez vezes mais longo que o palito $\frac{14}{99}$ como $\frac{140}{99}$, ele ainda indicou uma perturbação quando perguntou: 'Como uma fração pode ser maior que ela mesma?'"

Educação Matemática Debate
v. 9, n. 18, p. 1-24, ago. 2025

Realmente, esse capítulo da Matemática, com seus aparatos figurativo, simbólico e terminológico, recluso a figuras geométricas, resume o que Peter Hilton (1983) quis dizer com "a forma como as frações são ensinadas" (p. 37). Ela não contempla a realidade. Não parece ter significado algum no cotidiano dos estudantes.

É algo estranho ao estudante: não houve nenhuma situação-problema motivante — o que Vergnaud (1998) afirma se tratar de uma primeira condição necessária à aprendizagem —; tampouco se constitui como algo significativo para o estudante, conforme defendido por Freudenthal (1981). Como consequência, essa abordagem também não contempla sua característica quantificadora de coleções especiais da realidade, constituídas não apenas de objetos discretos.

Para nós, portanto, muitos dos problemas estudados em Educação Matemática em relação às dificuldades de crianças e estudantes de Pedagogia com frações são criados pelo currículo e pela didática. Apresentam-se como uma necessidade criada no interior da escola e não no mundo real.

3 Percurso metodológico

Pode-se afirmar que a metodologia adotada seguiu o *long-term methodology process* (Figura 3), com intercalação ou simultaneidade de interferências em sala de aula, capacitação interativa com professores, leituras, reflexões e escritos gerados. Esse processo ocorreu em um movimento contínuo de aumento de conhecimentos e aplicações observativas, ao modo da pesquisa desenvolvimental de Freudenthal (2002).

A pesquisa de desenvolvimento abrange
desenvolvimentos longitudinais com foco em
processos de aprendizagem em longo prazo
e é, em si, um
processo de aprendizagem de longo prazo.

Figura 1. Pesquisa desenvolvimental como um processo de aprendizagem em longo prazo com vistas a desenvolver processos de aprendizagem de longo prazo[4] (Freudenthal, 2002, p. 162)

A seguir, será apresentado o suporte teórico à metodologia utilizada. Serão incluídas narrativas de algumas perspectivas já desenvolvidas sobre o ensino e a aprendizagem das frações, por considerar que são essenciais e integrativas para uma visão mais ampla e atual sobre o tema.

Em 1994, Koeno Gravemeijer, da Holanda, escreveu para o *Journal of Research in Mathematics Education* um influente artigo, no qual descreveu o desenvolvimento curricular e a pesquisa educacional nos Países Baixos. Nesse contexto, o conceito de integrar *design* e pesquisa já possuía uma longa tradição. Gravemeijer caracterizou o desenvolvimento curricular naquele ambiente como uma espécie de improvisação intencional e sensata, referida como "bricolagem orientada por teoria" (Gravemeijer, 1994, p. 443).

> Em geral, os currículos são desenvolvidos para mudar a educação, introduzir novos conteúdos ou novos objetivos, ou para ensinar o currículo existente de acordo com novas percepções. Apesar do objetivo final de implementar mudanças, o desenvolvimento e a implementação são completamente separados no modelo RDD [*research-development-diffusion*, ou pesquisa-

(Olive e Steffe, 2001, p. 428).
[4] Colocamos o texto como figura para manter a disposição peculiar das palavras usadas no original em inglês.

> desenvolvimento-divulgação] convencional, que estava em voga nas décadas de 60 e 70. Em oposição a essa abordagem, Freudenthal (1991) apresentou seu conceito de "desenvolvimento educacional". Isso é mais do que apenas desenvolvimento de currículo; também contém o objetivo final de mudar a prática educacional. O desenvolvimento educacional não apenas implica que a implementação do currículo é antecipada desde o início, mas também implica que a formação de professores em serviço e pré-serviço, aconselhamento, desenvolvimento de testes e formação de opinião são incorporados no trabalho de desenvolvimento. A partir de 1970, todas essas atividades foram realizadas pelo Instituto para o Desenvolvimento da Educação Matemática [*Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs*] (IOWO) sob a direção de Freudenthal (Gravemeijer, 1994, p. 445).

Gravemeijer aponta que o termo *desenvolvimento educacional* também foi usado por Hemphill (1970) e Schutz (1970), mas que o conceito na visão deles não incluía o componente de pesquisa, que era essencial para Freudenthal (Gravemeijer, 1994, p. 445).

> O feedback da experiência prática em novos experimentos de pensamento induz uma iteração de desenvolvimento e pesquisa. Este processo cíclico está no centro do conceito de pesquisa desenvolvimental de Freudenthal. Ao contrário do que é sugerido pela abordagem RDD, a prática de desenvolvimento depende de uma alternância cíclica de desenvolvimento e pesquisa. [...] O processo cíclico que Freudenthal discerne também pode ser visto como um processo de aprendizagem do desenvolvedor. Retornando à bricolagem orientada por teoria, podemos dizer que uma teoria a priori global, que Freudenthal preferiria chamar de filosofia, orienta o trabalho de desenvolvimento. Esta teoria funciona como base para um processo de aprendizagem do desenvolvedor que é alimentado pela alternância cíclica de experimento de pensamento e experimento prático (Gravemeijer, 1994, p. 449-450).

O aspecto tempo e a longa duração dos ciclos de pensamento e prática da pesquisa desenvolvimental são importantes para Gravemeijer e Freudenthal — e para o IOWO como um todo. Gravemeijer vai buscar a bricolagem também em Jacob (1977), "que se refere à evolução como uma espécie de bricolagem, para a qual ele prefere a expressão inglesa '*tinkering*'" (Gravemeijer 1994, p. 447-448). Buscamos a citação de Jacob que Gravemeijer usou em seu original:

> Naturalmente, isso leva muito tempo. A evolução se comporta como um artesão que, durante eras e eras, lentamente modificaria seu trabalho, retocando-o incessantemente, cortando aqui, alongando ali, aproveitando as oportunidades para adaptá-lo progressivamente ao seu novo uso (Jacob, 1977, p. 1164).

Gravemeijer (1944) explica sua analogia entre a pesquisa desenvolvimental e o processo evolutivo:

> Na pesquisa desenvolvimental, o aspecto evolutivo é muito mais importante, não no sentido de um processo aleatório canalizado pela seleção natural, mas como um processo orientado por objetivos de melhoria e ajuste: um processo que é guiado por uma teoria que cresce durante o processo (p. 451).

Importante também que a justificação de *resultados* — na linguagem de Gravemeijer, descobertas — nesse tipo de pesquisa foge da positivista, que tanto influencia (ainda) pesquisas em educação. É uma justificação baseada em argumentos, não em reprodução de dados empíricos.

> No caso da pesquisa desenvolvimental, a teoria não é colocada à prova após a conclusão do desenvolvimento. Em vez disso, é o próprio processo de desenvolvimento que deve fundamentar a teoria. No processo cíclico de desenvolvimento e pesquisa, como esboçado por Freudenthal, descoberta e justificação estão intimamente entrelaçadas. A descoberta não se restringe ao experimento de pensamento e a justificação não é encontrada apenas nos resultados dos testes; algumas descobertas são feitas na fase de testes e parte da justificação não é empírica. A justificação também é encontrada no experimento de pensamento; no entanto, é então uma justificação baseada em argumentos. Em uma interpretação positivista, a justificação se restringe ao teste empírico; no caso da pesquisa desenvolvimental, no entanto, a racionalidade das escolhas e a interpretação dos dados empíricos também fazem parte da justificação. Isso está conectado a uma mudança do que Habermas (1987) chama de "Zweckrationalität" (racionalidade de meios e fins [ou racionalidade instrumental]) para o que ele chama de "kommunikative Rationalität" (racionalidade comunicativa). A racionalidade positivista, que leva em conta apenas as relações de meios e fins, é trocada por um tipo mais amplo de racionalidade, baseada na argumentação e compreensão (Gravemeijer, 1994, p. 453).

A pesquisa desenvolvimental, em cujo processo a discussão deste artigo se insere, compreende essa alternância de interferências em sala de aula, capacitação interativa com professores, leituras, reflexões, produção de currículo — apostilas e módulos — para professores e estudantes.

Iniciou-se no âmbito do projeto *Um novo currículo de Matemática da 1ª à 8ª série* — subprograma para o ensino da Ciência – SPEC – MAT – UnB/MEC/CAPES/PADCT2, coordenado pela primeira autora. O projeto integrou pesquisas sobre currículos, experimentações em grupos diversificados de estudantes, divulgação aos professores e aplicações em escolas da rede pública do Distrito Federal. O período de abrangência do projeto foi de 1985 a 1989 e teve cinco linhas de ação:

> a) definição de tópicos socialmente relevantes de Matemática e sua adequação ao interesse e à cognição dos estudantes do [antigo] 1º grau; b) aprofundamento no conteúdo e metodologia desses tópicos, com elaboração de propostas para o ensino do [antigo] 1º grau; c) atividades experimentais de aplicação das propostas oriundas do item b, em duas instâncias: no LEM [Laboratório de Ensino de Matemática da UnB] com crianças e em salas de aula do [antigo] 1º. grau, em uma escola piloto; d) divulgação dessas propostas e experiências aos professores por meio de encontros, seminários e jornais; e) pesquisas teóricas a respeito de Educação Matemática e currículos brasileiros e de outros países. Foram atingidos 3571 professores da rede pública, o que representava na época 45% dos docentes que atuavam com a práxis do ensino da Matemática na Secretaria de Educação do Distrito Federal (Muniz *et al.*, 2009, p. 8).

Do projeto, com relação a frações, restaram indagações como: Até que ponto as relações e operações aritméticas entre frações necessitam de um apoio ilustrativo gráfico? Como explicitar a lógica das operações para crianças de 10 anos de idade?

A próxima fase dessa pesquisa desenvolvimental, que configura um aprendizado de longo prazo para as desenvolvedoras foi o projeto *Gestar I*, voltado à formação de professores dos Anos Finais do Ensino Fundamental. Nesse projeto, participamos como autoras de módulos e consultoras responsáveis por analisar todos os materiais produzidos. Outra fase do projeto com a mesma finalidade foi o *Projeto Curso de Pedagogia para Professores em Exercício* (PIE) em parceria entre a Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal e a Faculdade de Educação da Universidade de Brasília, no período de 1999 a 2005.

De 1997 a 1999, houve o projeto *Pró-Ciências*, em parceria entre a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) e a Universidade Aberta do Distrito Federal (UNAB), no qual a primeira autora foi coordenadora do curso de Matemática e autora de módulos, e a segunda, autora de módulos. Cada uma dessas etapas retroalimentou as seguintes, contribuindo para a visão atual que ambas as autoras têm sobre o ensino e o currículo de frações.

Na década de 2000, mais especificamente entre os anos de 2001 e 2007, o Ministério da Educação lançou o programa *Gestar II*, com a elaboração de 24 módulos, dos quais oito foram escritos pelas pesquisadoras. Essas participaram, nesse projeto, das capacitações de formadores regionais nas regiões Norte, Nordeste e Centro-Oeste.

4 Lamentações — uma revisão da literatura

No rastro dos modelos geométricos predominantes no ensino das frações, também as pesquisas se centram nesses modelos. A literatura costuma classificar os modelos usados para representar frações visualmente em dois tipos: *modelos de área* e *modelos lineares*. O modelo linear mais conhecido é a reta numérica; modelos de área representam frações como partes de figuras geométricas, como círculos ou retângulos. Normalmente, um polígono ou um círculo é usado para representar a unidade e é dividido em partes congruentes. Os denominadores das frações são representados pelo número total de partes congruentes em que a figura é dividida, e os numeradores são representados pelo número total de partes sombreadas.

Ensinar frações a partir dos modelos de área que, na visão do estudante entrevistado por Santos (2006), é "ficar fazendo um bocado de número lá do branco e do pintado" (n.p.). Esse tipo de abordagem apenas treina o estudante em processo de dupla contagem que pouco tem relação com o conceito de fração como uma quantidade ou um número.

> Claramente, a dupla contagem é um processo que leva ao desenvolvimento da linguagem de fração a partir da enumeração das partes e não à construção do conceito de fração nos seus diferentes aspectos, isto é, a criança não percebe essa representação simbólica nem como número fracionário, nem como representante de uma quantidade (Campos *et al*., 1999, p. 15).

Já em 1986, Daphne Kerslake, depois de ter elaborado uma sequência de ensino de seis encontros de 40 minutos, testada por vários professores com suas próprias turmas, concluiu que "parece que a dependência em diagramas inibe a apreciação da ideia de que frações são números" (Kerslake, 1986, p. 97). Mesmo assim, muitos estudos mais recentes ainda estão sendo feitos para determinar qual representação gráfica de frações é a mais eficaz. E os livros didáticos continuam introduzindo fração com esses diagramas. Um exemplo lamentável de pesquisas que não foram aplicadas à realidade educacional.

Entre esses estudos mais recentes sobre representações de frações, encontramos o experimento de Hamdan e Gunderson (2017), no qual as pesquisadoras examinaram o

Educação Matemática Debate
v. 9, n. 18, p. 1-24, ago. 2025

desempenho de estudantes do 2º e 3º anos em tarefas sobre fração após três tipos de tratamento: treinamento em linha numérica, treinamento em modelo de área e treinamento não numérico — o grupo de controle resolveu palavras cruzadas. Nota-se o uso da palavra *treinamento* em todos os estudos experimentais mencionados nessa revisão de literatura, o que pode tornar os resultados não válidos para sala de aula, onde se espera que não haja treinamento, senão educação. Os treinamentos aplicados aos participantes do estudo estão reproduzidos nas Figuras 4 e 5.

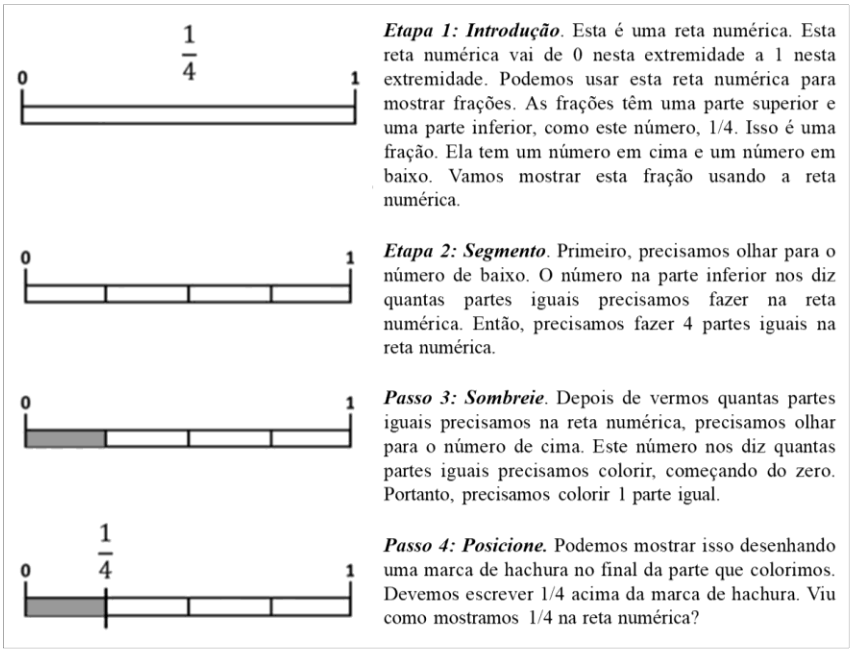

Figura 4: Procedimento de treinamento em reta numérica (Hamdan e Gunderson, 2017, p. 590).

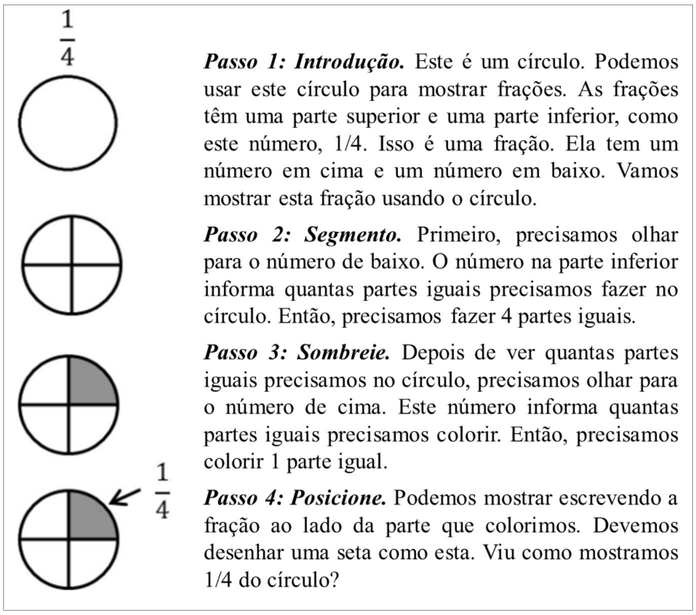

Figura 5: Procedimento de treinamento em modelos de área (Hamdan; Gunderson, 2017, p. 590).

Duas questões emergem desses treinamentos. O texto "As frações têm uma parte superior e uma parte inferior, como este número, $\frac{1}{4}$. Isso é uma fração. Ela tem um número em cima e um número em baixo" é bastante problemático, tanto do ponto de vista matemático quanto do didático. Em primeiro lugar, porque se refere a dois números (partes da representação) e não a um novo número indicado por essa representação. Afinal, fração não é a representação numérica. Em segundo, porque querem dar um exemplo de “um número em cima e um número embaixo”, mas escrevem 1/4, com o numerador e o denominador à mesma altura.

A reta numérica foi apresentada já pronta, não construída pelos estudantes. Isso não surpreende em um treinamento. Mas o fato de a reta ser, na verdade, um retângulo causa estranheza. As autoras justificam a escolha dizendo:

> Usamos uma reta numérica ligeiramente bidimensional durante o treinamento para evitar um erro comum que as crianças cometem com a medição com régua: contar as marcas de hachura como objetos em vez de contar os espaços entre as marcas de hachura (por exemplo, Solomon; Vasilyeva; Huttenlocher; Levine, 2015). Esperávamos que o uso de um retângulo fino guiasse a atenção das crianças para os espaços entre as hachuras como unidades significativas (Hamdan e Gunderson, 2017, p. 589).

A nosso ver, a opção demonstra como os modelos — no caso, retângulos — vão se tornando *indispensáveis* e inflexíveis. Os resultados indicaram que apenas o treinamento da reta numérica levou à transferência para uma tarefa de comparação de magnitude de fração diferente das oferecidas no tratamento. As autoras concluíram que a reta numérica desempenha um papel *causal* na compreensão da magnitude da fração das crianças e é mais benéfico do que o modelo de área.

Depois, as mesmas autoras se juntaram a outros pesquisadores e realizaram novo experimento (Gunderson *et al.*, 2019). Dessa vez, 148 estudantes do 2º ou 3º ano foram aleatoriamente distribuídos em quatro grupos, cada um recebendo um tipo de treinamento. Os pesquisadores chamaram esse artefato de *reta numérica unidimensional pura*, *reta numérica unidimensional híbrida*, *reta numérica quadrada* e modelo de área (Figura 6).

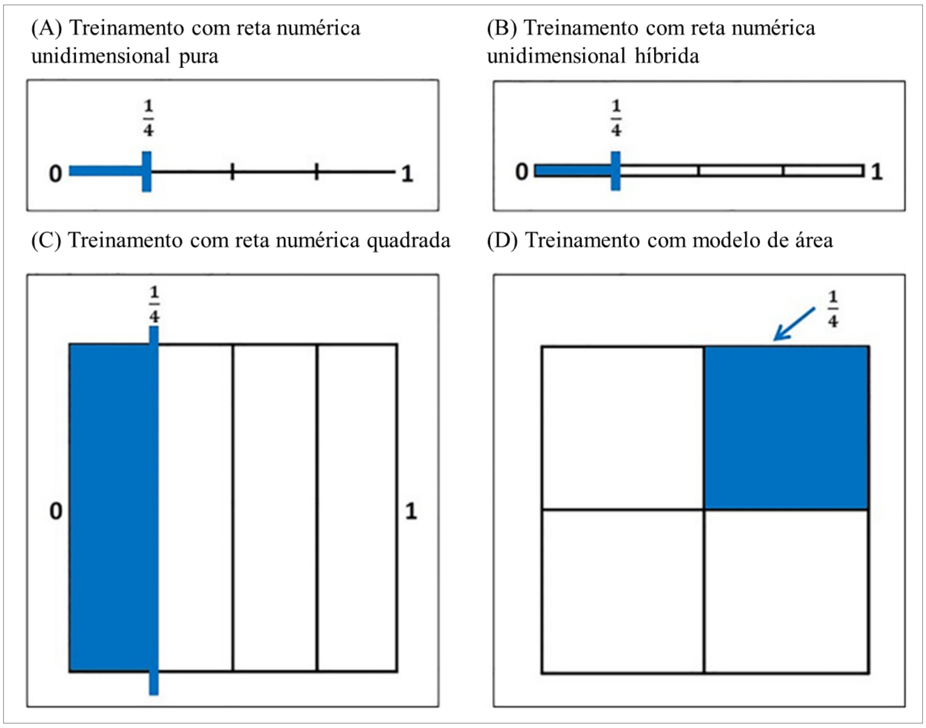

Figura 6: Exemplo das representações utilizadas durante o treinamento em cada condição (Gunderson *et al.*, 2019, p. 4)

Os tratamentos foram treinamentos de 15 minutos, conduzidos pelos experimentadores.

Entre outros resultados, a *reta numérica unidimensional pura* superou o tratamento com modelo de área em comparações de magnitude de fração. Os pesquisadores concluíram: “Nós argumentamos que a unidimensionalidade é uma característica crítica da reta numérica” (Gunderson *et al*., 2019, p. 1). Interessante essa argumentação, já que uma reta matematicamente é sempre unidimensional, e os artefatos criados pelos pesquisadores jamais deveriam ter sido chamados de retas.

Uma suposta superioridade do modelo linear em experimentos também foi observada em um estudo realizado por Sidney, Thompson e Rivera (2019) com 123 estudantes do 5º e 6º anos, que resolveram problemas de divisão de frações após um de quatro tipos de treinamento: retas numéricas, modelos de área circular, modelos de área retangular ou nenhum modelo visual. As crianças que resolveram os problemas acompanhados por uma reta numérica foram mais precisas e mostraram evidências de construir consistentemente modelos conceituais sólidos na maioria dos problemas, em comparação com crianças que resolveram os problemas com qualquer modelo de área ou sem nenhum modelo visual (Sidney, Thompson e Rivera, 2019). Os autores consideraram essas descobertas particularmente surpreendentes, porque os círculos e retângulos eram provavelmente familiares às crianças, dado que elas experimentaram modelos de divisão de áreas em partes iguais já no primeiro ano.

Já Tian *et al.* (2021) encontraram resultados diferentes. Eles designaram aleatoriamente estudantes do 4º e 5º anos a um de três grupos: um que recebeu treinamento com linha numérica, outro com modelo de área e um grupo controle, que recebeu treinamento não numérico. Os pesquisadores relataram que o treinamento com o modelo de área resultou em melhorias no desempenho das crianças em tarefas de estimação e de comparação de magnitudes de frações. No entanto, contrariamente às suas expectativas, o treinamento com a linha numérica não melhorou o desempenho das crianças nesse tipo de tarefa, e nenhum dos tipos de treinamento levou a avanços nas tarefas de transferência que avaliam o conhecimento da magnitude das frações.

Como já mencionamos, os resultados desses estudos devem ser interpretados com cautela. Foram realizados em contextos de experimentos clínicos, que seguem procedimentos rígidos e não permitem interações mais abertas com os estudantes ou explorações livres. Ponderamos que, se os métodos experimentais das ciências naturais realmente fossem adequados para a pesquisa educacional e se a conclusão de Hamdan e Gunderson (2017) — de que um treinamento em frações utilizando a reta numérica é a causa do sucesso na comparação de magnitudes de frações — fosse válida, então os participantes do estudo de Tian *et al.* (2021) deveriam ter tido êxito nas tarefas de comparação de frações após terem sido *treinados* com a reta numérica.

Cramer, Post e Delmas (2002) também utilizaram um desenho de pesquisa do tipo experimental. Entretanto, o *tratamento* não se limitou a treinamentos rápidos com apenas um tipo de representação para frações. Eles compararam o desempenho dos estudantes que usaram currículos comerciais (CC) para aprendizagem inicial de frações com o desempenho dos estudantes que utilizaram o currículo de fração do *Rational Number Project* (RNP). O currículo da RNP deu ênfase particular ao uso de múltiplos modelos físicos e à transição entre modos de representação — pictórica, manipulativa, verbal, do mundo real e simbólica.

O programa de ensino durou 28-30 dias e envolveu mais de 1.600 estudantes do 1º e do 4º ano em 66 salas de aula, distribuídas aleatoriamente em grupos de tratamento. A parte quantitativa da pesquisa (pré- e pós-testes) mostrou uma diferença significativa em desempenho entre os dois grupos, com o grupo RNP desempenhando melhor. A parte qualitativa da pesquisa (dados das entrevistas) mostrou diferenças na qualidade do pensamento dos estudantes ao resolverem tarefas de ordem e estimativa envolvendo frações. Os estudantes da RNP abordaram as tarefas conceitualmente, montando seu raciocínio a partir de suas imagens mentais de frações, enquanto os estudantes do CC confiaram mais frequentemente em procedimentos padrão, muitas vezes mecânicos, ao resolver tarefas de frações.

> Embora o modelo do círculo tenha sido o principal material concreto usado neste estudo, as preocupações de que este modelo reforçasse o pensamento sobre números inteiros não se concretizaram. Tais problemas podem ocorrer quando os estudantes estão limitados a usar um único modelo e não examinam o modelo enquanto a unidade varia contínua e sistematicamente, como neste estudo (Cramer, Post e Delmas, 2002, p. 199).

Todos os estudos que encontramos especificamente sobre as representações de frações foram do tipo experimental. É verdade que muitos desses foram publicados em periódicos de Psicologia. Porém, o estudo de Cramer, Post e Delmas (2002) foi publicado no *Journal of Research in Mathematics Education*, o periódico mais prestigioso em Educação Matemática nos Estados Unidos da América, com aceitação de aproximadamente 6% dos manuscritos enviados (Langrall, 2015).

Esperamos que esta revisão da literatura tenha causado no leitor a mesma indignação que sentimos com o tipo de estudos publicados sobre a problemática que pretendemos discutir neste artigo. E é precisamente este tipo de pesquisa, chamada pelo Departamento de Educação dos Estados Unidos de *scientifically-based research* — restringindo a definição de ciência a estudos experimentais —, que influencia políticas educacionais, diretrizes curriculares e livros didáticos (Lather e Moss, 2005).

Permitam-nos certa dose de afetação: deveria haver, um dia, uma manifestação pública de reconhecimento do erro — acompanhada de um pedido de desculpas dos autores de livros didáticos de Matemática e dos educadores matemáticos — pela violência simbólica e pela perda de tempo impostas aos estudantes.

Considerando as diferenças de resultados obtidas por Sidney, Thompson e Rivera, (2019), que encontraram restrições ao uso de modelos de área; e os de Cramer, Post e Delmas (2002), que não encontraram o mesmo problema, ponderamos que houve razões para essa diferença. Os últimos obtiveram resultados positivos entre estudantes que utilizaram o currículo de fração do RNP, que dá ênfase particular ao uso de múltiplos modelos físicos e à transição entre modos de representação — pictórica, manipulativa, verbal, do mundo real e simbólica —, ultrapassando o uso restritivo de um modelo de áreas e ampliando o espectro das abordagens dadas ao tema. Essa inferência das pesquisas impulsiona as opções que tomamos, as quais foram além, no sentido de praticamente eliminar o uso de modelos geométricos de áreas.

Quanto ao tema de frações na reta numérica, observa-se que houve tateamentos no estudo da representação da reta numérica e na colocação das frações nessa reta. Detectamos dificuldades no estabelecimento de uma unidade e confusão quanto à essência linear da reta numérica. Constatamos certo esquema de fuga a essa essência que pode ser vista na Figura 6. Nela, a reta matemática, linear, é citada como reta numérica unidimensional pura. Apresentam também a *reta numérica unidimensional híbrida*. Os dois outros modelos também dependem de figuras bidimensionais, mas esse parece uma prova insofismável da enorme dificuldade em introduzir qualquer conceito ou fato novo na teoria sem recorrer a retângulos, quando esses foram dominantes no desenvolvimento do tema. Apesar dessas dificuldades, houve afirmações de que o modelo linear propiciava o reconhecimento de magnitudes de frações.

Nossas ponderações a esse respeito são de que, em nossa pesquisa, não houve esse tipo de dificuldades. A reta linear já era conhecida pelos estudantes para marcação de quantidades de objetos inteiros, e por terem conhecido partes desses objetos na realidade, foi natural acrescentar essa marcação de partes obtidas em contagens. A *magnitude* das frações havia sido adquirida por reconhecerem que expressavam quantidades, inerente ao senso numérico e à percepção de ordenação.

Por outro lado, o objetivo desta pesquisa ultrapassava o propósito de colocar frações na reta. Pretendia-se alcançar a percepção do resultado final obtido com a distribuição das frações ao longo de toda a reta, tão próximas umas das outras, e ainda permitindo visualizar a possibilidade de introduzir mais outra entre duas quaisquer. A imaginação visual levava a prever que elas preencheriam a reta. Alcançamos esse objetivo, e alertamos para o fato de que muitos outros números caberiam na reta — *ainda mais* do que as frações. Todavia, até o momento, não encontramos pesquisas que tragam contribuições nessa direção.

Em busca de pesquisas que abordassem as frações no mundo real, encontrou-se Mack (1990, 1995), com estudos sobre as influências do que chamou de *conhecimento informal* na aquisição de simbolismos e procedimentos formais. Em 1990, Mack conduziu uma pesquisa com oito estudantes do sexto ano, que haviam estudado frações no quinto ano por meio de um livro didático tradicional. Durante o estudo, os estudantes participaram de aulas que enfatizavam o aspecto conceitual das frações, em vez de procedimentos. As perguntas eram feitas verbalmente, e materiais concretos, lápis e papel estavam disponíveis, embora seu uso não fosse incentivado.

Mack relata que todos os oito estudantes chegaram à pesquisa com ideias erradas com relação ao uso de notação simbólica e de procedimentos com frações. Por outro lado, eles também já tinham um conhecimento informal substancial sobre frações, que lhes permitiu resolver numerosos problemas apresentados no contexto de situações do mundo real. Esse conhecimento informal, todavia, se mostrou desconectado do conhecimento sobre notação fracionária, procedimentos e representações concretas. Mack notou também que os participantes mostraram sofrer interferência de procedimentos memorizados quando tentavam resolver problemas — tanto quando estes eram apresentados de forma simbólica quanto em situações do mundo real.

A principal conclusão foi que os estudantes podem construir conhecimento simbólico e procedimentos a partir de seu conhecimento informal apenas se conseguirem relacionar as duas situações. Em 1995, Mack aventou que o conhecimento informal poderia proceder, entre outros, de situações cotidianas vivenciadas com a família. A nosso ver, contudo, o conhecimento demonstrado pelos estudantes parecia prover não só de situações cotidianas, mas também de um processo de aprendizagem alinhado ao sistema escolar, uma vez que os estudantes demonstravam proficiência numa fase inicial de partições e relações acima do esperado para situações familiares, chegando a resolver, informalmente, situações do tipo $4\frac{1}{8} - \frac{7}{8}$, propostos em narrativas com palavras.

Esse tipo de conhecimento é considerado altamente relevante para a aprendizagem matemática, por constituir o domínio das raízes das ideias, históricas ou de especialistas, sobre um novo campo, antes mesmo que seus criadores providenciem o aparato formal para armazenar esse conhecimento — embora o usem, inadequadamente, para apresentá-lo. No entanto, mesmo já tendo sido introduzidos à simbologia, os estudantes não demonstraram o mesmo desempenho quando confrontados com ela. A hipótese interpretativa é que a essência da pesquisa não teria sido revelar o poder do conhecimento não formalizado para a aquisição do formal, mas, sobretudo, a adequação didática da apresentação do formal, capaz de amalgamá-lo ao saber. A pesquisa de Mack (1995) foi, portanto, bastante contributiva para este estudo, por apresentar correlações entre conhecimento simbólico e situações de vida, e não apenas com representações gráficas em figuras geométricas.

Educação Matemática Debate
v. 9, n. 18, p. 1-24, ago. 2025

5 A transição para coleções da realidade

Vários pontos surgidos na trajetória da primeira autora demandaram caminhos alternativos. Um deles foi a constatação de que a introdução ao tema acontece frequentemente com o uso de círculos ou barras retangulares divididas em partes equitativas (Dante e Viana, 2021; Silveira, 2021), geralmente congruentes. Como afirmamos, é algo estranho ao estudante. Mas, sabendo que o propósito é explorar numericamente partes especiais de objetos, juntas ou não a alguns deles, então, indaga-se: Por que não tomar isso na própria realidade, em que tais coleções são abundantes? Por que trabalhar com esquemas representantes e não com os representados? Essa opção foi registrada pela primeira autora em Bertoni (s.d.) e, neste estudo, destacamos alguns pontos relevantes.

6 Descobertas (*also known as/*resultados)

Durante o trabalho no projeto *Um novo currículo de Matemática da 1ª a 8ª séries,* e no trabalho com crianças para a elaboração da proposta *Brincar, Pensar, Fazer* (Bertoni, 1994), propusemos a elas situações-problema realistas, envolvendo objetos reais inteiros e partes especiais deles, permitindo-lhes desenvolver estratégias de solução espontâneas, por meio de conversas e discussões. Emergiu o uso de conceitos e estratégias com significado. As estratégias foram muitas vezes não convencionais.

A parte *meio* ou *metade* é socialmente conhecida e prontamente reconhecida pelas crianças. Na maioria das vezes, aparece junto a objetos inteiros — aquilo que, nos livros didáticos, consta como fração mista: um sanduíche e meio, duas laranjas e meia, uma volta e meia, duas horas e meia, três quadras[5] (ou quarteirões) e meia. Essa realidade que adotamos inclui considerar, de modo natural, mais que duas metades, sem que nada justifique o atributo *imprópria* conferido pelos livros didáticos. No mundo real — e não no restrito universo fracionário dos didatas —, metades aparecem em número muito superior a dois. Em um trajeto de cem quilômetros e meio, por exemplo, se forem contadas as metades de quilômetros percorridos, chega-se a 201.

Do mesmo modo, outros conjuntos ou expressões surgem no cotidiano, envolvendo objetos inteiros junto a partes especiais: quartos, décimos, centésimos. Nessa trajetória, os *meios* ou *metades* levaram os estudantes a pensar em *metades de metades,* identificadas como quartos, porque implicavam dividir o objeto em quatro partes. Em seguida, apareceram também metades de quartos, o que resultava, por exemplo, em uma pizza dividida em oito partes, cada uma chamada de um oitavo.

Com a noção de divisão de objetos já aceita e tornada significativa, introduziram-se outras, consubstanciadas em situações envolventes, como a divisão de alimentos em três partes, originando os terços — e, por subdivisões, sextos e nonos. De modo análogo, construíram-se os quintos e décimos. Em cada etapa, várias relações foram estabelecidas, algumas simples, outras mais complexas. A relação de que um meio equivale a dois quartos correu como um rastilho. Os estudantes sabiam mentalmente, por exemplo, que um quarto mais um quarto corresponde à metade; que metade menos um quarto dá um quarto; e até mesmo que metade mais um quarto equivale a três quartos.

6.1 O surgimento da fração como um quociente

A metade da metade proporcionou outras surpresas. Quando tiveram que dividir três sanduíches entre quatro pessoas, dividiram primeiro ao meio, resultando em um sanduíche e

[5] Palavra comum na realidade brasiliense. Uma unidade arquitetônica não igual, mas que pode ser pensada como um quarteirão.

meio; depois, novamente ao meio, obtendo meio mais um quarto. Sabiam o valor dessa quantidade, três quartos, e chamamos a atenção para isso: 3 dividido por 4 deu 3 quartos. Conhecia-se a situação mais comum, ou canônica, para obter esse resultado, com outro enfoque, e aproveitamos a oportunidade para apresentá-la: quatro rapazes foram a uma pizzaria e pediram três pizzas. O garçom dividiu logo as três em quatro partes. Cada um pegou uma parte da primeira, depois uma parte da segunda e mais uma da terceira. Quanto cada um comeu? Também nessa situação, tem-se 3 dividido por 4, o que resulta em 3 quartos. Porém, não houve reação entre os estudantes. Parecia que preferiam pensar em metade da metade. São oportunidades como essa que despertam ideias e surpreendem.

Abrimos parênteses para narrar a ocorrência, nesta pesquisa desenvolvimental, de um momento ilustrativo do *long term learning process*, envolvendo as pesquisadoras. Para a primeira, foi essencial incluir o registro da divisão de 3 por 4, feita pelos estudantes, na qual obtiveram o resultado $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, rapidamente identificado como $\frac{3}{4}$. Para a segunda, que é também historiadora matemática, chamou atenção o fato de esse processo ser análogo ao usado pelos antigos egípcios, e de ser sempre possível. Ela ponderou que, no Egito Antigo, usavam-se, no que mais se assimila ao conceito de frações conhecido atualmente, as partes, ou frações unitárias (com duas exceções: dois terços e três quartos). Muitos, na contemporaneidade, se admiram disso. Perguntam por quê. Por que será que não usavam, por exemplo, a fração $\frac{5}{7}$? Ora, isso era para eles uma divisão: cinco dividido por sete (Bunt, Jones e Bedient, 1988). E não usavam como resultado *cinco partes sétimas* — da mesma forma que as crianças, na situação descrita no parágrafo anterior, não gostaram de dar a resposta como $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$. Exigiam que todas as partes utilizadas (todos os tipos de fração unitária) fossem diferentes — visando, talvez, apresentar pedaços unitários tão grandes quanto possível. Um dos resultados que os antigos egípcios atribuíam a essa divisão era *meio mais sétimo mais quatorze avos* (ver Figura 7).

Figura 7: Dois possíveis resultados da divisão de cinco por sete (Elaboração própria)

Esse *insight* conjunto das autoras resultou na elaboração de atividade a ser proposta em interações com aprendizes, por ambas, em futuros encontros. A intenção é observar o interesse despertado e o desempenho revelado a partir da situação.

Atividade. Em um país antigo, um senhor tinha que dividir quatro moedas de drex de modo igualitário entre 5 serviçais. Ele dispunha de moedas correspondentes a frações unitárias do drex: 1 meio, 1 terço, 1 quarto, e assim por diante. Seria possível fazer o pagamento usando apenas essas moedas, de modo que cada serviçal recebesse a mesma quantia e sem que nenhum deles recebesse moedas repetidas?

1) Façam essa divisão. (Uma ideia é ver, de modo sucessivo, se o senhor pode dar 1 moeda de $\frac{1}{2}$ a cada um, depois ver se ainda poderia dar $\frac{1}{3}$ a cada um, até esgotar as 3 moedas.)

Solução: Dando $\frac{1}{2}$ a cada um, gastaria 5 de $\frac{1}{2}$ e ainda teria 1 drex e meio. Não pode dar 5 moedas de terços. Mas poderá dar 5 de 1 quarto, sobrando ainda 1 quarto. O qual, dividido por 5, dará $\frac{1}{20}$. Cada um receberia $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$.

Sem exigir o uso das maiores moedas possíveis, o problema admite outra solução. Começaria da mesma forma, dando $\frac{1}{2}$ drex a cada um. Sobrariam 1 drex e $\frac{1}{2}$ drex. É provável que os estudantes percebam que ambas as quantias podem ser divididas por cinco, resultando em moedas unitárias. De fato, 1 dividido por 5 dá $\frac{1}{5}$ para cada um; e $\frac{1}{2}$ dividido por 5 dá $\frac{1}{10}$ para cada um. No total, cada um recebe $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$ de drex.

2) Expresse o total de drex que cada um recebeu. Esse resultado era esperado?

Essa narrativa ilustra também o caráter cíclico dessa categoria de pesquisa. Mas como ir além desse processo intuitivo que levou crianças e antigos egípcios a construir frações como resultados de divisões?

Mesmo sem essa aplicação histórica, as situações da realidade que demandam resultados numéricos envolvendo frações recaem, necessariamente, na formação do conceito de fração como número. A proposta é que, a partir das frações-partes, com caráter de relação parte-todo, ocorra uma progressiva elaboração dessa característica numérica — a de expressar quantidades —, o que conduzirá à construção de um conjunto infinito de números, profusamente distribuídos ao longo da reta numérica, juntamente com os números naturais. Partes de objetos, isoladas ou acopladas a inteiros, servirão de suporte para os números fracionários, ou racionais positivos.

6.2 A colocação dos números fracionários na reta numérica. As frações equivalentes correspondendo a um único número. A densidade dos fracionários na reta

Conforme Bertoni (s.d.), sugerimos a colocação de outros números fracionários na reta, já marcada com os números naturais, de forma gradativa. Para crianças menores, os conceitos de distância ou medida pareceram estranhos naquele diminuto contexto de segmentos: não conseguiam ver distância *naqueles* pedacinhos. Contudo, conseguiam perceber analogias com a posição dos números naturais na reta, especialmente pelas quantidades expressas por uns e outros. Inicialmente, com apenas os números naturais desenhados na reta na lousa e anunciando que iam contar laranjas, foram colocados pequenos cartazes sobre a sequência, com ilustrações de uma laranja, duas laranjas, e assim por diante. Em seguida, apresentamos um cartaz semelhante, com meia laranja, dizendo: "*Aqui tem meia laranja*". Indagamos: "*Onde se deve colocar esse cartaz e escrever o número* $\frac{1}{2}$*?*" A maioria dos estudantes reagia prontamente, sugerindo a posição a meio caminho entre o 0 e o 1.

De certo modo, usou-se uma linguagem mais posicional, do tipo: "*Se daqui (do zero) até aqui vale 1, onde se coloca um ponto para valer (ou significar) metade*?" Assim, foram colocados, primeiramente, os números do tipo $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ ... Vale notar que duas metades, quatro metades etc., coincidem com os números naturais. Essas representações foram posicionadas logo acima das marcas anteriores, correspondentes aos naturais. Também sobre a marca $1\frac{1}{2}$ colocou-se a marca $\frac{3}{2}$; sobre $2\frac{1}{2}$, apareceu $\frac{5}{2}$ ... Depois passaram a ser marcados os quartos: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $1\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{4}$ ... Nessa proposta, vão surgindo pilhas verticais de representações numéricas superpostas (Figura 8). Todas correspondem a um único ponto da reta, todas com a mesma distância ao zero, todas representando quantidades equivalentes — portanto, todas correspondem a um só número. Os estudantes vão construindo conhecimento de que número fracionário é assim: tem inúmeras representações diferentes.

Outro fato que notam é como a reta vai se enchendo com esses novos números. Vamos começar pensando no intervalo de 0 a 1. Depois de colocar os meios $\left(\frac{1}{2} \text{ e } \frac{2}{2}\right)$ e os quartos, passaram a ser marcados os terços e sextos. O número $\frac{1}{3}$ é maior do que $\frac{1}{4}$ e menor que $\frac{1}{2}$. Fica entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$. Um sexto está a meio caminho entre 0 e $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{6}$ coincide com $\frac{1}{2}$. E $\frac{1}{5}$ é menor do que $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$ e $\frac{2}{5}$ ficam antes de $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$, depois. Um décimo $\left(\frac{1}{10}\right)$ é marcado como a metade de $\frac{1}{5}$, a meio caminho entre 0 e $\frac{1}{5}$. Marcar todos os décimos de 0 a 1 já ficou um pouco difícil. As crianças resolveram desenhar outra reta numérica, com intervalos maiores entre os números naturais. Em seguida, marcaram-se os vigésimos — cada um é metade do décimo.

E teremos que marcar os trigésimos, centésimos, milésimos... Para o último, teremos que dividir de 0 a 1 em 1000 partes. Não é tão impossível: se tomar a unidade do tamanho do metro, ele já aparece dividido em milésimos. E dá para dividir em mais: milhões, trilhões de partes... Nessa altura, os estudantes começam a pensar que a reta vai ficar totalmente cheia com os números fracionários, nem vai dar para separar um ponto do outro. É hora de levantar a orelha da lebre — dizer que ainda vai sobrar muito espaço, mais do que o ocupado pelos números racionais (a Matemática tem seus mistérios). E que saberão sobre isso depois que aprenderem sobre números decimais. Vão saber que há uma infinidade deles que não são números fracionários, mas devem ter seus lugares na reta numérica.

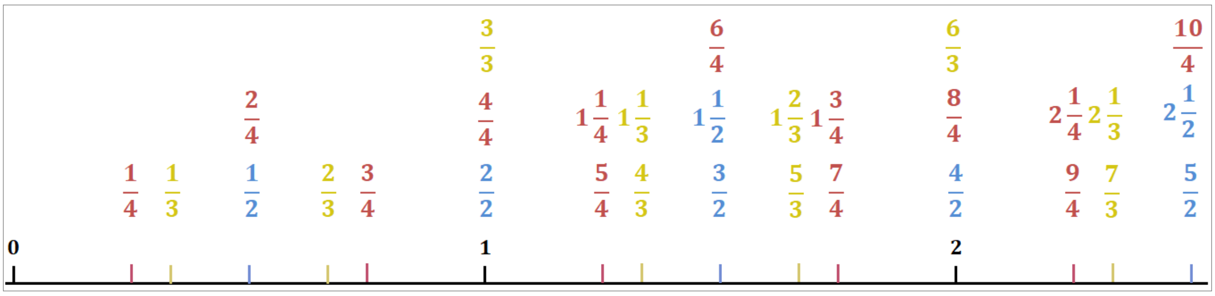

Figura 8: Reta numérica sendo ocupada por números fracionários em várias representações (Elaboração própria)

Não se apresentou neste texto, por falta de espaço, o desenvolvimento das operações aritméticas entre esses números, de modo a ficar claro e lógico. A divisão permite verificar que a divisão entre dois números fracionários é sempre possível e exata, resultando em um quociente fracionário. Além disso, as operações são um campo fértil para ampliar outras funções que os números fracionários podem ter, como de operador e de razão.

As observações sobre a reação dos estudantes e dos professores foram realizadas ao longo da trajetória, em turmas e tópicos distintos. Elas foram apontando rumos. Os estudantes estiveram, na maioria das vezes, envolvidos. Frente à apatia deles, foi necessário, algumas vezes, manifestação enérgica de algum colega, dizendo: “*Pode fazer, dá certo mesmo*”. Lídimos juízes julgando as propostas das pesquisadoras. Parte dos professores se manifestava em dúvida: reconhecia que os estudantes tinham dificuldades, mas se sentiam confortáveis com as regras que tinham aprendido. E nunca estavam juntos: turma de professores e turma de estudantes. No máximo, o professor com sua própria turma.

Também fizemos recuos necessários. Reduziu-se o uso do material manipulável, criado no projeto *Um novo currículo de Matemática da 1ª à 8ª séries*. Eram tiras divididas que correspondiam aos meios, quartos, oitavos... usadas para atividades e jogos. Atraíam como jogos, mas as equivalências refletiam pouco na aprendizagem matemática. Outro recuo foi nas ilustrações feitas na apostila do projeto. Usavam-se móveis em MDF com frentes divididas em partes equivalentes ou relacionadas. Observou-se que ainda era um modelo recluso, apenas um único exemplo da realidade.

Educação Matemática Debate
v. 9, n. 18, p. 1-24, ago. 2025

7 Considerações finais

Este artigo foi escrito com a esperança de alcançar professores e futuros professores, apesar de apresentado para pesquisadores de currículo. Muitos outros já foram escritos pela primeira autora sobre o ensino e a aprendizagem de frações com base em suas pesquisas e tendo professores como sua audiência direta. No entanto, viu-se que pouco ou nada mudou no ensino e as pesquisas, em vez de serem desenhadas com base nos resultados de pesquisas anteriormente realizadas, ignoram alguns estudos, fazendo *cherry-picking* — usando uma seleção tendenciosa — naquilo que consideram em suas revisões de literatura. Assim, não há um crescimento coerente no conhecimento da área de Educação Matemática, nem coerência nas propostas de ensino que ela possa influenciar. As metodologias de pesquisa utilizadas também são altamente condicionadas por políticas de publicação e pela racionalidade instrumental adotada por agências de fomento.

A linguagem do que temos escrito para professores (Bertoni, 2020) pode ser um tanto *naïf;* as ideias, contudo, não o são. O objetivo sempre foi o de desvelar, cada vez mais, o universo das frações, verificando até onde se poderia chegar munido da interpretação de parte-todo. A trajetória narrada mostra ser robusta a abordagem parte-todo para o ensino e a aprendizagem de frações, quando adequadamente desenvolvida. Ela permite que as frações sejam compreendidas como palavras e símbolos numéricos quantificadores de coleções de objetos da realidade, as quais envolvem objetos inteiros e partes equitativas desses, expressando quantidades. Portanto, adquirem o estatuto de número.

Essa abordagem também abre caminho, de forma natural, para o reconhecimento do número fracionário como quociente de dois números naturais, sendo o divisor não nulo. A trajetória resvalou pelas noções de medida e razão — os estudantes inferiram, por exemplo, que a situação de ter 1 em 4 era melhor do que ter 1 em 5. Entretanto, essas duas noções, vinculadas ao número fracionário, ainda precisam ser retomadas.

Foi possível ainda que os estudantes percebessem que cada número fracionário possui múltiplas representações, todas equivalentes entre si. Sobre a colocação das frações na reta numérica, os estudantes tiveram a impressão de tê-la recoberto — mas é só uma impressão.

Nossa busca por literatura sobre o ensino de frações vinculadas à realidade, sem depender de modelos geométricos, revelou-se infrutífera. No entanto, acreditava-se que o Instituto IOWO, na Holanda, poderia oferecer material relevante. A segunda autora localizou, então, o livro *Frações na Educação Matemática Realista* (1991), de Streefland, um trabalho do grupo holandês. O acesso ao livro foi difícil e só foi possível após a conclusão da coleção BNCC de Professores para Professores, na qual a primeira autora contribuiu com o módulo de frações (Bertoni, s.d.). Esse módulo já incorporava nossos principais objetivos deste estudo: trabalhar frações a partir de partições de objetos e coleções do mundo real, destacar sua relação com quantificação — inclusive em conjuntos não discretos —, evoluir para a noção de número e construir o conjunto infinito desses números na reta, explorando sua densidade.

No livro de Streefland, encontramos uma abordagem alinhada e ampliada em relação à nossa pesquisa desenvolvimental. O autor descreve o desenvolvimento e a testagem de um programa para o ensino de frações na escola primária, já em prática na época, e propõe uma teoria instrucional na Educação Matemática Realista. No capítulo 4, mesmo sem detalhar como as frações foram introduzidas aos estudantes, Streefland (1991) apresenta uma ampla variedade de atividades formais e informais, mobilizando diferentes representações.

Um exemplo emblemático é o problema das três pizzas para quatro estudantes. Já havia discutido tanto a solução clássica quanto a abordagem observada nesta pesquisa, que permitiu uma conexão histórica com o método egípcio. Streefland, por sua vez, amplia o problema ao considerar diferentes formas de divisão realista das pizzas, simulando cortes plausíveis em um

Educação Matemática Debate
v. 9, n. 18, p. 1-24, ago. 2025

ambiente de pizzaria. Ele menciona que três estudantes poderiam receber três quartos de pizza unidos, restando três pedaços de um quarto para o quarto estudante — uma distribuição possivelmente não satisfatória para o quarto estudante. Outra possibilidade é que dois estudantes recebam três quartos unidos, enquanto os dois restantes dividem o remanescente da pizza, resultando em meia pizza e um quarto para cada um.

Em outro caso, o autor apresenta a divisão de cinco pizzas entre oito estudantes, em que cada um recebe $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, e questiona como as pizzas foram cortadas e servidas. A solução deve ser prática e realista, evitando cortes excessivos ou formas pouco usuais. Esse cuidado com a distribuição satisfatória das partes remete a preocupações dos antigos egípcios (Gillings, 1962) e adiciona uma camada significativa ao problema.

As situações exploradas por Streefland, incluindo ladrilhamentos, misturas com diferentes proporções, distâncias e debates em comitês, são todas ancoradas em contextos reais e incentivam os estudantes a pensar, trocar ideias e argumentar. Sua abordagem representa uma contribuição ímpar para esta proposta e para a continuidade da pesquisa.

Questionamos se o currículo de Educação Matemática Realista (EMR) estava sendo, de fato, implementado na Holanda. Foi lamentável constatar que o currículo de Matemática realista vem sofrendo ataques de natureza reacionária (Van den Heuvel-Panhuizen, 2010). Os opositores defendem uma nova reforma da Educação Matemática, de caráter quase oposto ao da EMR. Segundo esses críticos, a Matemática não deveria ser ensinada em contextos; estratégias informais devem ser evitadas, pois confundiriam as crianças; a esquematização progressiva resultaria em desvios longos e desnecessários; e o foco não deveria estar na compreensão, já que, segundo afirmam, a compreensão viria automaticamente após o treinamento. Além disso, afirmam, de forma explícita, que as crianças não precisam pensar. Na visão dos críticos da reforma inspirada na EMR, o conteúdo principal a ser ensinado na escola primária deve se restringir à aprendizagem de algoritmos escritos.

Marja Van den Heuvel-Panjuizen relata que os primeiros quarenta anos de implementação do currículo do EMR ocorreram por meio de tentativas e erros, mas em relativa tranquilidade. Tratou-se, segundo ela, de uma revolução silenciosa, sem causar praticamente nem mesmo um sussurro na mídia. Houve pouquíssima oposição e nenhuma pressão externa significativa. Explicou ainda que, ao longo desses quarenta anos, de 1960 a 2010, o Ministério da Educação esteve envolvido apenas como facilitador, sem interferência direta no conteúdo da reforma.

> Os subsídios governamentais permitiram o surgimento de uma extensa infraestrutura nos Países Baixos, permitindo que o desenvolvimento, a investigação e a formação ocorressem em coerência e cooperação mútuas com a área de educação. Enquanto outros investigadores educacionais foram responsabilizados pela lacuna entre a sua investigação e a prática educativa, fomos apresentados como um exemplo de como a investigação deveria ser feita; ver o relatório do Conselho de Educação dos Países Baixos. Não só houve reconhecimento no nosso próprio país, mas também inspiramos desenvolvimentos em muitos outros países. O nosso trabalho foi, e ainda é, muito procurado em todo o mundo, ainda que talvez apenas porque dê a estes países boas esperanças de conseguirem obter resultados tão elevados em testes como os holandeses (Van den Heuvel-Panjuizen, 2010, p. 1).

Entretanto, em 2004 e 2005, surgiram os primeiros relatos de resultados abaixo dos anteriores tanto nos testes nacionais holandeses como no Tendências em Estudos Internacionais de Matemática e Ciências (TIMSS) e no Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA). E a EMR se tornou alvo de críticas. Van den Heuvel-Panjuizen argumenta que a discussão iniciada não foi nada acadêmica, mas uma verdadeira campanha de difamação que ocorreu principalmente em jornais e *sites*. Muitos dos pontos de ataque nem eram realmente característicos da EMR, e são discutidos em Van den Heuvel-Panjuizen (2010). No desenrolar da história, os que pegaram a EMR como bode expiatório para a piora de resultados em 2004 e 2005 resolveram entrar no mercado e publicar um livro *didático* mecanicista. Encontraram uma editora que, a princípio, demonstrou interesse em publicá-lo; não obstante, enviaram o manuscrito para a avaliação de professores e, felizmente, como resultado, a publicação do livro foi recusada.

Esse episódio conduz à reflexão sobre o quanto os testes padronizados e o mercado de livros didáticos acabam ditando o que acontece nas escolas. Esses elementos frequentemente exercem uma influência e um poder que se sobrepõem ao trabalho dos pesquisadores e educadores matemáticos.

Conflitos de Interesse

A autoria declara não haver conflitos de interesse que possam influenciar os resultados do estudo apresentado no artigo.

Declaração de Disponibilidade dos Dados

Os dados coletados, produzidos e analisados no artigo serão disponibilizados mediante solicitação à autoria.

Nota

A revisão textual (correções gramatical, sintática e ortográfica) deste artigo foi custeada com verba da *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais* (Fapemig), pelo auxílio concedido no contexto da Chamada 8/2023.

Referências

BEHR, Merlyn; LESH, Richard; POST, Thomas; SILVER, Edward. Rational number concepts. *In*: LESH, Richard; LANDAU, Marsha. (Ed.). *Acquisition of mathematics cconcepts and processes*. New York: Academic Press, 1983, p. 91-125.

BERTONI, Nilza Eigenheer. A construção do conhecimento sobre número fracionário. *Bolema*, 21, n. 31, p. 209-237, 2008.

BERTONI, Nilza Eigenheer. Aprendizagem articulada dos conjuntos numéricos: reflexões, relatos e propostas. In: KALEFF, Ana Maria; PEREIRA, Pedro Carlos (Org.). *Educação Matemática: diferentes olhares e práticas*. Curitiba: Appris, 2020, p. 13-44.

BERTONI, Nilza Eigenheer. *Bloco III, Matemática. Módulo 15. Ensino e aprendizagem dos números fracionários misturados aos números naturais*. BNCC de professores para professores. Ipê, s.d.

BERTONI, Nilza Eigenheer. *Brincar, pensar, fazer: 3ª e 4ª séries*. Apostilas fotocopiadas, 1994.

BERTONI, Nilza Eigenheer. *Educação e linguagem matemática IV: frações e números fracionários.* Brasília: UnB, 2009.

BERTONI, Nilza Eigenheer. Frações: situações aditivas e multiplicativas. In: MENEZES, Mindé Badauy; RAMOS, Wilsa Maria (Org.). *Coleção ProInfantil: Módulo 1, Unidade 7*. Brasília: MEC/SEB/SED, 2005, p. 33-58.

BERTONI, Nilza Eigenheer. Um novo paradigma no ensino e aprendizagem das frações. In: *Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática*. Recife, 2004, p. 1-15.

BERTONI, Nilza Eigenheer; FIORENTINI, Leda Maria Rangearo. Somando frações no ábaco dos romanos e auxiliando os babilônios em divisões com resto. In: *Actas do 1º História e Educação Matemática*. Braga 1996, p. 311-312.

BUNT, Lucas Nicolaas Hendrik; JONES, Phillip S; BEDIENT, Jack D. *The historical roots of elementary Mathematics*. Massachusetts: Courier Corporation, 1988.

CRAMER, Kathleen A.; POST, Thomas R.; DELMAS, Robert C. Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: a comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 33, n. 2, p. 111-144, 2002. https://doi.org/10.2307/749646

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. *Ápis Mais: Matemática: 4º ano*. São Paulo: Ática, 2021.

FREUDENTHAL, Hans. Major problems of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, v. 12, n. 2, p. 133-150, 1981.

FREUDENTHAL, Hans. *Revisiting Mathematics Education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

GABRIEL, Florence; VAN HOOF, Jo; GÓMEZ, David M.; VAN DOOREN, Wim. Obstacles in the development of the understanding of fractions. *In*: ROBINSON, Katherine M.; DUBÉ, Adam K.; KOTSOPOULOS, Donna. (Ed.). *Mathematical cognition and understanding: perspectives on mathematical minds in the Elementary and Middle School years*. Cham: Springer, 2023, p. 209-225.

GILLINGS, Richard J. Problems 1 to 6 of the rhind mathematical papyrus. *The Mathematics Teacher*, 55, n. 1, p. 61-69, 1962.

GRAVEMEIJER, Koeno. Educational development and developmental research in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, n. 5, p. 443-471, 1994. https://doi.org/10.2307/749485

GUNDERSON, Elizabeth A; HAMDAN, Noora; HILDEBRAND, Lindsey; BARTEK, Victoria. Number line unidimensionality is a critical feature for promoting fraction magnitude concepts. *Journal of Experimental Child Psychology*, v. 187, p. 1-29, 2019. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2019.06.010

HACKENBERG, Amy J. Units coordination and the construction of improper fractions: a revision of the splitting hypothesis. *The Journal of Mathematical Behavior*, 26, n. 1, p. 27-47, 2007. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.03.002

HAMDAN, Noora; GUNDERSON, Elizabeth A. The number line is a critical spatial-numerical representation: evidence from a fraction intervention. *Developmental Psychology*, 53, n. 3, p. 587-596, 2017. https://doi.org/10.1037/dev0000252

HANSEN, Nicole; JORDAN, Nancy C.; RODRIGUES, Jessica. Identifying learning difficulties with fractions: a longitudinal study of student growth from third through sixth grade. *Contemporary Educational Psychology*, v. 50, p. 45-59, 2017. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2015.11.002

HEMPHILL, John Knox. Educational development. *In*: HEMPHILL, John Knox; ROSENAU, Fred. S. (Ed.). *Educational development: a new discipline for self-renewal*. Eugene: Center for the Advanced Study of Educational Administration, 1970, p. 3-15.

HILTON, Peter. Do we still need fractions in the elementary curriculum? *In*: *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*. Berkeley, 1983, p. 37-41.

JACOB, François. Evolution and tinkering. *Science*, v. 196, n. 4295, p. 1161-1166, 1977. https://doi.org/10.1126/science.860134

JAHN, Ana Paula; SILVA, Maria José Ferreira; SILVA, Maria Célia Leme; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. Lógica das equivalências. In: *Anais da 22ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação*. Caxambu, 1999, p. 1-18.

KERSLAKE, Daphne. *Fractions: children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in Secondary Mathematics project*. Windsor, Berkshire. 1986.

LAMON, Susan J. *More! Teaching fractions and ratios for understanding: In-depth discussion and reasoning activities*. 3 ed. New York: Routledge, 2012.

LAMON, Susan J. *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. 3 ed. Routledge, 2017.

LANGRALL, Cynthia W. Make this your year to review. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46, n. 1, p. 2-3, 2015. http://dx.doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0002

LAPPAN, Glenda; FEY, James T.; FITZGERALD, William M.; FRIEL, Susan N.; PHILLIPS, Elizabeth Difanis. *Bits and pieces I: understand rational numbers (teacher's guide)*. Hoboken: Prentice Hall, 2002.

LAPPAN, Glenda; FEY, James T.; FITZGERALD, William M.; FRIEL, Susan N.; PHILLIPS, Elizabeth Difanis. *Bits and pieces II: using rational numbers (teacher's guide)*. Hoboken: Prentice Hall, 2004.

LATHER, Patti; MOSS, Pamela A. Introduction: implications of the scientific research in Education report for qualitative inquiry. *Teachers College Record*, 107, n. 1, p. 1-3, 2005. http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-9620.2005.00450.x

MACK, Nancy K. Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, n. 5, p. 422-441, 1995. https://doi.org/10.2307/749431

MACK, Nancy K. Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, n. 1, p. 16-32, 1990.

MUNIZ, Cristiano Alberto, COSTA, Edilene Simões, SILVA, Erondina Barbosa, CARVALHO, Rosália Policarpo Fagundes; BACCARIN, Sandra Aparecida de Oliveira. Professora Nilza Eigenheer Bertoni: sua contribuição para o desenvolvimento da Educação Matemática no Distrito Federal e no Brasil. In: *Anais da 32ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação*. Caxambu, 2009, p. 1-15.

NAMKUNG, Jessica; FUCHS, Lynn. Remediating difficulty with fractions for students with Mathematics learning difficulties. *Learning Disabilities*, v. 24, n. 2, p. 36-48, 2019. https://doi.org/10.18666/LDMJ-2019-V24-I2-9902

OLIVE, John; STEFFE, Leslie P. The construction of an iterative fractional scheme: the case of joe. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20, n. 4, p. 413-437, 2001. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00086-X

PIRES, Enam Lima. *Meus registros para frações e decimais: entre o que eu penso e o que eu escrevo; entre o que eu escrevo e o que você lê*. 2004. 150f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade de Brasília. Brasília.

RIPOLL, Cydara Cavedon; SIMAS, Fabio Luiz Borges; BORTOLOSSI, Humberto; RANGEL, Letícia; GIRALDO, Victor Augusto; REZENDE, Wanderley; QUINTANEIRO, Wellerson. *Frações no Ensino Fundamental.* v. 1. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2016.

SANTOS, Yanna Karla de Oliveira. *Matemática: por que uns gostam e outros não?* 2006. Trabalho de Conclusão de Curso (Pedagogia). Universidade de Brasília. Brasília.

SCHUTZ, Richard Edward. The nature of educational development. *Journal of Research and Development in Education*, v. 3, n. 2, p. 39-64, 1970.

SIDNEY, Pooja G.; THOMPSON, Clarissa A.; RIVERA, Ferdinand D. Number lines, but not area models, support children's accuracy and conceptual models of fraction division. *Contemporary Educational Psychology*, 58, p. 288-298, 2019. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2019.03.011

SILVEIRA, Ênio. *Desafio Matemática, 4º ano, Manual do Professor*. São Paulo: Moderna, 2021.

SINGHA, Parmjit; HOONA, Teoh Sian; NASIRA, Nurul Akmal Md; HANA, Cheong Tau; CHEONG, Tau Han. Obstacles faced by students in making sense of fractions. *The European Journal of Social and Behavioural Sciences*, 30, n. 1, p. 34-51, 2021. http://dx.doi.org/10.15405/ejsbs.287

STEFFE, Leslie P. A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20, n. 3, p. 267-307, 2001. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00075-5

STREEFLAND, Leen. *Fractions in Realistic Mathematics Education: a paradigm of developmental research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

TIAN, Jing; BARTEK, Victoria; RAHMAN, Maya Z; GUNDERSON, Elizabeth A. Learning improper fractions with the number line and the area model. *Journal of Cognition and Development*, 22, n. 2, p. 305-327, 2021. http://dx.doi.org/10.1080/15248372.2021.1890603

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. Reform under attack: forty years of working on better mathematics education thrown on the scrapheap? No way! *In*: *Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.* Fremantle, 2010, p. 1-25.

VERGNAUD, Gérard. A comprehensive theory of representation for Mathematics Education. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17, n. 2, p. 167-181, 1998. https://doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80057-3