10.46551/emd.v8n14a01 ISSN 2526-6136

Educação Matemática Debate

Função Exponencial: uma proposição de tarefas matemáticas

Rodrigo dos Santos Ferreira
Secretaria Municipal de Educação de Barreiras
Barreiras, BA — Brasil
0000-0003-4144-433X
ferreirarodrigosan@gmail.com

André Pereira da Costa
Universidade Federal de Campina Grande
Cajazeiras, PB — Brasil
0000-0003-0303-8656
andre.pcosta@outlook.com

Recebido • 13/10/2023
Aceito • 15/11/2023
Publicado • 01/01/2024

Artigo

Resumo: O objetivo deste trabalho foi propor tarefas matemáticas envolvendo a função exponencial com o emprego do software GeoGebra. Para isso, fundamentou-se no debate sobre tarefas matemáticas de João Pedro da Ponte e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Esta é uma pesquisa qualitativa explicativa quanto a seus objetivos e bibliográfica quanto aos seus procedimentos. A construção da proposta passou pela elaboração e adaptação das tarefas por meio de testagem no GeoGebra, seguida pela composição das orientações didáticas ao professor. O GeoGebra se mostrou um recurso didático adequado à proposição de tarefas sobre funções do tipo exponencial por possibilitar um caráter experimental à aula, o que poderá conceber ao estudante do Ensino Médio a autonomia no estudo deste conceito matemático.

Palavras-chave: Função Exponencial. GeoGebra. Tarefas Matemáticas. Representações Semióticas.

Exponential Function: a proposal for mathematical tasks

Abstract: The purpose of this work has been to propose mathematical tasks involving the exponential function using the GeoGebra software. Thus, it has been based on the discussion about mathematical tasks by João Pedro da Ponte and the Theory of Semiotic Representation Registers. This is a qualitative explanatory research as regards its aims and it has been based upon bibliographical survey and assessement of the sources. Its development has involved the elaboration and adaptation of tasks through testing in the GeoGebra, followed by the writing of a set of didactical guidelines to teachers. The GeoGebra has been proved to be a suitable didactical resource for proposing tasks on exponential functions by enabling an experimental character in the classroom, which could provide High School students with autonomy in studying this mathematical concept.

Keywords: Exponential Function. GeoGebra. Mathematical Tasks. Semiotic Representations.

Función Exponencial: una propuesta de tareas matemáticas

Resumen: El objetivo de este trabajo fue proponer tareas matemáticas que involucraran la función exponencial utilizando el software GeoGebra. Para ello, se fundamentó en el debate sobre tareas matemáticas de João Pedro da Ponte y en la Teoría de los Registros de Representación Semiótica. Esta es una investigación cualitativa explicativa en cuanto a sus objetivos y bibliográfica en cuanto a sus procedimientos. La construcción de la propuesta implicó el desarrollo y la adaptación de tareas mediante pruebas en GeoGebra, seguido por la elaboración de orientaciones didácticas para el profesor. GeoGebra demostró ser un recurso didáctico adecuado para proponer tareas sobre funciones exponenciales al permitir un carácter experimental en la clase, lo que podría brindar autonomía a los estudiantes de Secundaria en el estudio de este concepto matemático.

Palabras clave: Función Exponencial. GeoGebra. Tareas Matemáticas. Representaciones Semióticas.

1 Introdução[1]

O conceito de função é um dos objetos matemáticos mais explorados na Educação Básica. Apesar de que o trabalho mais sistemático com o ensino do conteúdo ocorra no Ensino Médio, a BNCC (Brasil, 2017) reforça que sua noção intuitiva pode ser explorada ainda no Ensino Fundamental, por meio de tarefas simples, envolvendo a relação entre variações proporcionais de grandezas — como, por exemplo, na comparação das medidas de açúcar para se produzir uma determinada quantidade de suco.

Com relação à função exponencial, alguns pesquisadores e professores relatam, no entanto, dificuldades dos estudantes já no Ensino Médio em compreender o conteúdo no que diz respeito a aspectos como: reconhecê-la em duas representações distintas e até operacionalizá-la em sua forma algébrica (Santos e Bianchini, 2012; Silva, 2016; Coelho, 2016; Silva e Lazzarin, 2018; Goldone, 2019; Silva, Prando e Gualandi, 2020). Além da função exponencial, definida algebricamente por $f(x) = a^x$ com $a > 0$, existem as chamadas funções do tipo exponencial dadas por $g(x) = b \cdot a^{c \cdot x} + d$ que serão discutidas neste artigo. Apesar de não atenderem à todas as características e propriedades da função exponencial, este tipo de função tem sua relevância marcada, principalmente, pela manipulação de seus coeficientes permitir um estudo mais global do comportamento exponencial (Faria, Souza Junior e Cardoso, 2016). Na perspectiva das representações semióticas, o gráfico de g possui quatro configurações visualmente distintas, conforme ilustrado no Quadro 1.

Do ponto de vista didático, Piano (2016) reforça que o conceito de função exponencial é corriqueiramente prejudicado no currículo escolar, no qual os estudantes apresentam inúmeras dificuldades de aprendizagem. Para o autor, tais dificuldades emergem muitas vezes, do tempo insuficiente para uma boa abordagem/exploração do conceito em sala de aula, que acaba sendo preterido em relação aos demais modelos de funções.

De todo modo, no mesmo grupo das funções afins e quadráticas, a função exponencial é um dos modelos mais discutidos no Ensino Médio (Lima, 2013), podendo tal recorrência ser justificada por suas inúmeras aplicações como modelo de descrição, previsão e análise de uma série de fenômenos naturais tais como o montante em juros compostos, variação de temperatura, curvas de aprendizagem, a pressão atmosférica e o crescimento/reprodução de bactérias e vírus — como o comportamento pandêmico da Covid-19 em função do tempo.

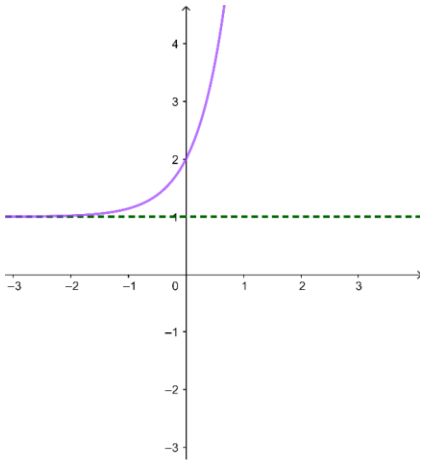
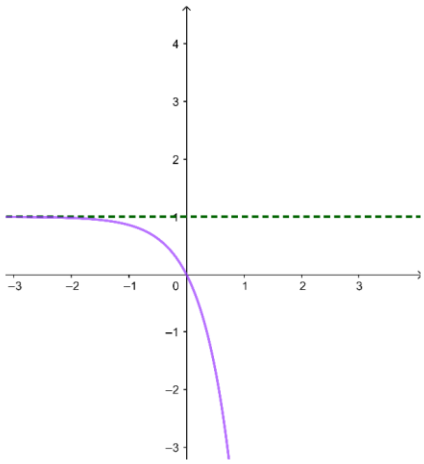
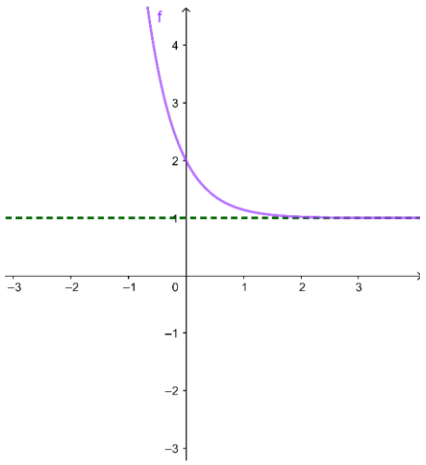
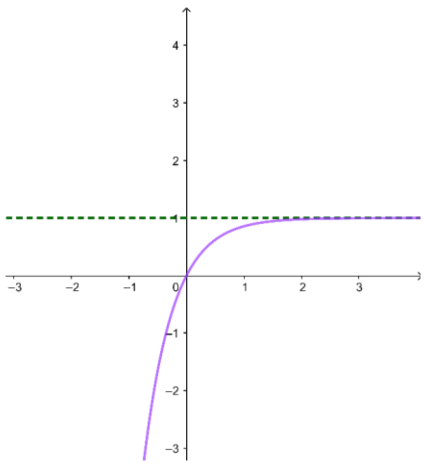
No entanto, corroborando com a constatação de Piano (2016), dados de avaliações nacionais revelam um baixo desempenho dos estudantes nos níveis progressivos de proficiência[2] que exigem competências sobre funções exponenciais. O Sistema de Avaliação da Educação Básica — SAEB (Brasil, 2019) revela que apenas 1,11% dos estudantes do Ensino Médio do Brasil alcançaram o nível 7 no qual encontra-se a habilidade de resolver problemas envolvendo as funções exponenciais. Neste mesmo nível, na Bahia, chegaram 0,57% e na cidade de Barreiras (BA) — onde residem, trabalham e pesquisam os autores deste artigo — o número cai para 0,24%. Com relação ao nível 9 que contempla a habilidade de determinar a expressão algébrica de uma função exponencial a partir de um texto ou gráfico, o alcançaram

[1] Este artigo compõe a dissertação de mestrado defendida no Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT) da Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB), organizada em formato *multipaper*, escrita pelo primeiro autor e orientada pelo segundo autor.

[2] "Os resultados dos testes de aprendizagem realizados são apresentados em uma escala de proficiência, composta por níveis progressivos e cumulativos, da menor para a maior proficiência. Significa dizer que quando um percentual de estudantes está posicionado em determinado nível da escala, pressupõe-se que, além de terem desenvolvido as habilidades referentes a este nível, provavelmente também desenvolveram as habilidades referentes aos níveis anteriores" (Brasil, 2019).

apenas 0,07% no Brasil, 0,03% na Bahia e 0% em Barreiras.

Quadro 1: Representações gráfica visualmente distintas de $f(x) = b \cdot a^{c \cdot x} + d$

Caso 01: $b > 0$, $a > 1$ e $c > 0$ ou $b > 0$, $0 < a < 1$ e $c < 0$ 	Caso 02: $b < 0$, $a > 1$ e $c > 0$ ou $b < 0$, $0 < a < 1$ e $c < 0$ 
Caso 03: $b > 0$, $0 < a < 1$ e $c > 0$ ou $b > 0$, $a > 1$ e $c < 0$ 	Caso 04: $b < 0$, $0 < a < 1$ e $c > 0$ ou $b < 0$, $a > 1$ e $c < 0$ 

Fonte: Elaboração própria

Com base nesses dados, conjecturamos que uma das justificativas para tal baixo rendimento, e conforme já citado por Coelho (2016), é o défice de tempo que este tema sofre no currículo escolar ou, até mesmo, a dificuldade do professor em ensiná-lo. Nessa direção, Santos e Bianchini (2012) evocam a necessidade de diversificação das metodologias por parte do professor, alegando que apenas o uso do livro didático não supre as necessidades dos estudantes frente a este conteúdo, e indicam o software GeoGebra como um importante instrumento de mediação.

Neste contexto, as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação são, por sua vez, recursos com ampla discussão entre pesquisadores da Educação Matemática, que podem contribuir na superação desses problemas relativos ao ensino de funções exponenciais. Os softwares provenientes da Matemática e, em especial da Matemática dinâmica, tais como o GeoGebra, tem como caraterísticas gerais o fato de concederem à aula de Matemática possiblidades de manipulação, interação e análise simultâneas de um dado objeto matemático, em especial as funções.

É importante frisar a necessidade de capacitação didática e técnica do professor acerca do uso de um determinado recurso tecnológico, para que realmente seja possível explorar as possibilidades didáticas dessa metodologia. Muitos professores, apesar de reconhecerem a importância de tais ferramentas e, em alguns casos, afirmarem que os empregam em sala de aula, contudo, possuem uma visão superficial e limitada da sua utilização didática, que não os permitem realizar explorações mais eficientes em sala de aula (Carvalho, 2017).

Usar um projetor multimídia, uma apresentação em slides ou o próprio GeoGebra, esporadicamente, sem planejamento e domínio didático básico tanto sobre o programa quanto sobre o próprio sistema operacional do computador, são casos que fragilizam a aula e podem colocar o professor em situação desconfortável. Tal fato pode ser evidenciado, por exemplo, quando surgir um problema técnico simples ou uma pergunta mais incisiva e complexa do estudante sobre como usar um recurso Y para analisar um problema X.

Assim, o GeoGebra pode ser um importante recurso didático em sala de aula, visto que pode atribuir à aula de Matemática um caráter experimental que permite aos estudantes a comparação, principalmente, das representações algébrica e gráfica dos objetos matemáticos (Hohenwarter e Fuchs, 2004).

Alguns estudiosos no Brasil (Rezende, Pesco e Bartolossi, 2012; Santos e Bianchini, 2012; Silva, 2016; Faria, Souza Junior e Cardoso, 2016; Martins, Doering e Bartz, 2017; Sousa, Viali e Ramos, 2017; Silva e Lazzarin, 2018; Goldoni, 2019; Ferreira e Pereira da Costa, 2021) se dedicaram a pesquisar os efeitos didáticos de metodologias que combinavam o ensino da função exponencial associado ao uso do GeoGebra. Tais estudos explicitam que, de forma geral, uma das principais características do programa é o caráter empírico que pode imprimir à aula, instigando nos estudantes autonomia e a possibilidade de trabalho concomitante com as múltiplas representações da função.

Desta forma, o objetivo foi propor tarefas matemáticas envolvendo as funções do tipo exponencial com o emprego do software GeoGebra. Para isso, nos ancoramos nos estudos sobre o conceito e classificação de tarefas de Ponte (2005) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2017). O intuito foi evidenciar os aspectos didáticos que os professores deverão levar em conta, como o planejamento, leituras e competências técnico/didáticas, além da forma como o software pode ser empregado de modo a explorar competências especificas relativas às funções exponenciais.

2 Tarefas matemáticas

Ponte (2005) é um professor e pesquisador em Educação Matemática que dedica parte de seus estudos à discussão do conceito de tarefa, se preocupando com as formas de intervenção e objetivos didáticos que geram, segundo o autor, exigências distintas a depender do contexto educacional em questão. De imediato, é posto que a discussão sobre as tarefas só é relevante em um ensino que leve em conta o papel ativo dos estudantes, sendo que as tarefas são elementos organizadores de sua atividade (Ponte *et al*., 2015). Uma tarefa é uma ferramenta de mediação que pode ser formulada pelo professor e proposta ao estudante; ser conjecturada por ele e discutida com o professor; ser proposta logo no início da aula ou ir se formulando ao longo dela (Ponte, 2005).

De forma geral, uma tarefa é um objetivo de uma ação, de uma atividade que, por sua vez, remete àquilo que o estudante faz em um dado contexto, ou seja, uma tarefa pode gerar diversas atividades. Para isso, é necessário levar em conta: a forma como foi proposta (no início ou no fim, pronta ou formulada durante a aula); o perfil dos estudantes (se são mais especulativos, por exemplo); o ambiente escolar e a própria experiência do professor (Ponte, 2012a). Assim, por exemplo, a *questão 27 do capítulo 7 sobre função exponencial* é uma tarefa e a forma como o estudante resolverá, as discussões que ele fizer tanto com professor quanto com seus colegas, os instrumentos que empregou — o GeoGebra, por exemplo — na resolução e a forma como justificou e interpretou sua resposta, tudo isso constitui uma atividade.

Definido o conceito de tarefa, Ponte (2005, 2012a) estabelece sua classificação e tipologia com base em alguns aspectos. Os mais fundamentais são o grau de desafio e estrutura. O primeiro remete a percepção de dificuldade que o estudante terá, frente à uma determinada tarefa, e varia entre os polos elevado e reduzido. O grau de estrutura pode ser fechado — tanto o que se pede, quanto as informações dadas na questão são claras e objetivas, o estudante terá a missão de aplicar de imediato algum conceito — e aberto — comporta alguma indeterminação nas informações do enunciado ou na resposta em si; o estudante, possivelmente, terá que fazer análises, inferências, conjecturas mais profundas para encontrar a melhor forma de resolução e a resposta mais adequada. Com base nestes aspectos temos quatro tipos de tarefas, tal como ilustrado no Quadro 2.

Quadro 2: Tipos de tarefas com base em seu grau de desafio e estrutura

	Grau de desafio **elevado**	Grau de desafio **reduzido**
Estrutura **aberta**	Investigações	Explorações
Estrutura **fechada**	Problemas	Exercícios

Fonte: Adaptado de Ponte (2005, p. 8)

Mesmo com esta demarcação, Ponte (2005) reforça, no que diz respeito ao grau de desafio, que o principal fator que distingue uma investigação de uma exploração, e um problema de um exercício, é o fato de o estudante possuir ou não previamente as ferramentas — técnicas e cognitivas — para a resolução da tarefa. Se não possuir, estará diante de uma questão com grau de desafio elevado, caso contrário, será reduzido. É reforçada, então, a importância da bagagem epistemológica que o estudante traz de casa, fruto de suas experiências, bem como o conhecimento produzido em outras disciplinas ou em outras séries e unidades, reforçando, assim, o caráter hierárquico e a transversalidade da Matemática.

Outro aspecto que Ponte (2005, 2012a) agrega para classificar as tarefas acima é o contexto que tem como extremos os polos realidade — uso das funções exponenciais na Matemática Financeira, Biologia e Química, por exemplo — e Matemática Pura — operações e demonstrações com o emprego de técnicas e propriedades estritamente algébricas, por exemplo. Skovsmose (2000) *apud* Ponte (2005) considera, ainda, um nível intermediário dado pela semi-realidade, na qual se enquadram aquelas tarefas que são pseudoreais, por serem utópicas — *um homem realiza um trajeto de carro que descreve perfeitamente a parábola a seguir*... — ou por descriminarem excessivamente algumas propriedades e fatores externos em prol da interpretação e resolução da questão — ... *calcule o tempo de percurso considerando todo o trajeto retilíneo, a velocidade constante e a viajem sem pausas* ... —. Desta forma, temos a Figura 1.

Figura 1: Classificação das questões por seu contexto (Ponte, Quaresma e Branco, 2011, p. 11)

Ponte (2005) reforça, ainda, que não é possível associar um tipo de tarefa específica a um dado contexto, já que é possível haver problemas centrados na Matemática pura e exercícios em contexto de realidade, por exemplo.

3 Teoria dos registros de representação semiótica

Esta teoria, idealizada por Duval (2012a), parte da premissa de que a aprendizagem em Matemática passa, necessariamente, pela compreensão e operacionalização de representações. Isso se justifica pela diferença entre a Matemática e as demais áreas do conhecimento cujos objetos estudados são não semióticos e, portanto, acessíveis por meio de instrumentos — telescópio para a Astronomia, por exemplo. Os objetivos matemáticos são semióticos, só sendo possível ter acesso a eles por meio de suas múltiplas representações (Moretti, 2002; Duval, 2017; Pereira da Costa e Rosa dos Santos, 2020).

Nesse sentido, um objeto matemático pode ser a função exponencial, uma circunferência ou o número um, ao passo que suas representações podem ser dadas por $f(x) = a^x$, *conjunto dos pontos do plano equidistantes de um ponto fixo* e $\log_2 2$, respectivamente. Entender esta diferença e saber lidar com ela é uma tarefa necessária e relevante para o professor de Matemática. São comuns as discussões sobre estudantes que não reconhecem um determinado objeto matemático em mais de uma representação (Santos, 2012; Silva, 2016), como, por exemplo, não saber identificar a curva de crescimento de casos de Covid-19 como uma representação do conceito de função exponencial, reconhecendo-a apenas por sua lei algébrica. Outra situação é que, por uma questão de otimização, é mais fácil usar o gráfico de uma função para fazer análises comparativas e projeções do que sua forma algébrica, por exemplo.

De forma geral, não confundir um objeto matemático com sua representação e identificar este mesmo objeto em várias representações distintas gera o que Duval (2012a) chama de *paradoxo cognitivo*. Antes de apresentar a solução dada por sua teoria para contornar tal paradoxo, o pesquisador acrescenta, ainda, um terceiro fator na relação entre representante e representado, as unidades significantes. Tais unidades são os elementos característicos de cada representação que carregam consigo um conteúdo próprio dotado de propriedades — tais como variáveis, coeficientes, traços, curvatura etc.

Ocorre que, em sala de aula, dar-se-á mais atenção às representações mentais — conceito que um estudante tem sobre um objeto — do que às representações semióticas (Duval, 2012b; Hillesheim e Moretti, 2013). Para designar diferentes tipos de representações semióticas na Matemática, Duval (2017), parafraseando Descartes, utiliza o termo registro dos quais destacamos: a língua natural, as escritas algébricas e numéricas — binária, decimal e fracionária, por exemplo —, as e as representações gráficas. No trabalho com funções também é comum o uso da representação por tabelas, associando grandezas. O autor também aponta que para ser considerado um sistema semiótico, o registro deve permitir três atividades cognitivas essenciais: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão.

A formação de uma representação identificável remete a um sistema semiótico dotado de regras e propriedades que torne possível seu reconhecimento e operacionalização, como as regras gramaticais para os sistemas de escritas e as geométricas para polígonos (Duval, 2012b). Esta atividade cognitiva permite que sejam feitos os tratamentos.

O tratamento é uma transformação interna de um registro que está condicionada a suas regras. O cálculo e a reconfiguração são exemplos de tratamentos dos registros algébricos e geométricos, respectivamente (Duval, 2012b). Acontece que, em muitos casos, não basta permanecer em um mesmo registro para se resolver um problema, como no caso em que é necessário construir um gráfico estatístico de uma série de dados postos em tabelas. Neste caso temos uma conversão.

A conversão é uma transformação externa em que se transita de um registro a outro, preservando a totalidade ou uma parte do conteúdo da representação inicial (Duval, 2012b). O autor reforça que a conversão é uma atividade cognitiva diferente dos tratamentos, pois muitos estudantes podem, por exemplo, saber encontrar pontos cartesianos de uma função exponencial bem como, com seu gráfico pronto, saber interpretar se é crescente ou decrescente, mas são incapazes de associar o gráfico com a expressão algébrica ou de compreender em que momento um é mais útil que o outro e realizar essa transição, sem que lhes seja solicitado.

A conversão tem seu valor, do ponto de vista didático, por ser para o estudante um instrumento que lhe permite fazer a escolha do melhor sistema para resolução de uma tarefa. Para o professor, é uma excelente ferramenta de análise que permite constatar se o estudante entende o que é, por exemplo, uma função exponencial ou se ele só a reconhece quando apresentada algebricamente, com coeficientes específicos e usando os símbolos x e $f(x)$ para designar seu domínio e imagem. Talvez, isso ocorra por não ser explorada em atividades de demonstração, operacionalização e prova — na qual se sobressaem os tratamentos —, assim, a conversão não desperta tanta atenção (Hillesheim e Moretti, 2013).

Do ponto de vista do professor de Matemática que está analisando a resolução de uma tarefa desenvolvida por certo estudante, o que deve ser levado em conta? Quais critérios deverão ser considerados para analisar esta resolução e, antes disso, para elaborar esta tarefa? Aqui surge a necessidade de compreensão do fenômeno da congruência semântica relacionado à transição entre registros de representação.

A congruência semântica remete à associação das unidades significantes dos registros de partida e de chegada referentes a um mesmo objeto matemático que pode ser trivial — dizemos que há congruência — ou pode exigir adaptações e interpretações para que isso seja possível — não há congruência. Duval (2012b) estabelece três critérios para que se possa analisar a congruência entre dois registros, conforme apresentado no Quadro 3.

Quadro 3: Critérios de congruência semântica entre dois registros

Critérios	Características
A possibilidade de uma **correspondência *semântica*** de elementos significantes	A cada unidade significante simples de uma das representações pode-se associar uma unidade elementar
A **univocidade *semântica*** terminal	A cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde a uma única unidade significante elementar no registro da representação de chegada
A **organização das unidades significantes**	As organizações respectivas das unidades significantes de duas representações comparadas, conduzem apreender as unidades em correspondência semântica, segundo a mesma ordem nas duas representações. Este critério de correspondência, na ordem do arranjamento das unidades que compõem cada uma das duas representações, é pertinente apenas quando estas apresentam o mesmo número de dimensão

Fonte: Adaptado de Duval (2012b, p. 283-284)

É importante, desta forma, o professor ter atenção com as tarefas desenvolvidas com os seus estudantes, pois aquelas que exigem conversões congruentes — como a construção do gráfico de uma função, a partir de sua expressão algébrica — podem dar uma falsa impressão de aprendizagem, quando, na verdade, é o inverso (não congruente), que revela suas dificuldades em reconhecer o mesmo objeto em duas representações distintas (Duval, 2005 *apud* Hillesheim e Moretti, 2013).

Em suma, a solução proposta por Duval (2012b) para o paradoxo cognitivo é condicionar a aprendizagem matemática à coordenação e reconhecimento, por parte do estudante, de ao menos dois registros de e um mesmo objeto matemático. Existirão indícios de aprendizagem, por parte do estudante, quando ele souber transitar entre tais registros (conversão), reconhecendo a relação entre suas unidades significantes em situações quando há e, principalmente, quando não há congruência, sabendo executar as operações e transformações internas de cada sistema semiótico (tratamentos).

4 Aspectos metodológicos

Esta é uma pesquisa qualitativa, quanto à sua abordagem, pois não se preocupa com representatividade numérica, mas sim com o aprofundamento da compreensão sobre os objetivos estudados (Gerhardt e Silveira, 2009). Quanto aos seus objetivos, é explicativa, pois a principal característica de tais pesquisas explicativas é a identificação dos fatores que determinam ou que contribuem para a ocorrência de determinados fenômenos (Gil, 2002).

Nos concentramos em propor diferentes tarefas matemáticas sobre o conceito de função exponencial para serem trabalhadas no Ensino Médio — em situações reais de sala de aula. Assim, foi dada ênfase no que o professor deve planejar e antecipar e ao que se espera que o estudante mobilize por meio de embasamento em materiais já elaborados em termos de teorias (representações semióticas e classificação das tarefas), ferramentas (GeoGebra) e demais dados técnicos e científicos (tarefas adaptadas de outros materiais e informações empíricas para construção de modelos).

Apresentaremos exemplos dos quatro tipos de tarefas — exercícios, problemas, explorações e investigações — discutidos por Ponte (2005). Para isso, nos norteamos nos pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, no que diz respeito à necessidade de coordenação de múltiplos registros de um mesmo objeto, à relação de congruência e aos comportamentos da função exponencial discutidos no tópico anterior. Com relação à classificação das tarefas, apresentaremos as virtudes e cuidados que o professor deve ter ao aplicá-las, bem como os momentos convenientes para tal.

A finalidade é que esta proposta seja um roteiro de aula para que o professor discuta o conteúdo de funções exponenciais, uma forma de facilitar e auxiliar seu trabalho por meio do GeoGebra. Cientes de problemas tais como os citados por Piano (2016), com relação ao tempo insuficiente para um trabalho bem desenvolvido e detalhado, nos basearemos em uma carga horária de 06 horas/aula dedicados exclusivamente ao assunto.

As etapas deste estudo referente à proposição das tarefas foram: 1ª etapa: elaboração e adaptação (a priori) das tarefas; 2ª etapa: testagem no GeoGebra; 3 ª etapa: retomada das tarefas (modificações realizadas após o primeiro teste no GeoGebra); 4ª etapa: (re)testagem no GeoGebra; 5ª etapa: elaboração das orientações sobre o uso das tarefas.

Logo, apresentaremos duas propostas didáticas, as quais o professor poderá incluir no trabalho sobre função exponencial — em termos da ordem em que serão apresentados e dos objetivos impressos em cada etapa — sendo, evidentemente, válidas e bem-vindas implementações que agreguem e estejam em sintonia com os fundamentos aqui apresentados.

5 Proposição de tarefas

Esta proposição de tarefas se baseia nos conceitos de ensino e aprendizagem exploratórios defendido por Ponte (2005), nos quais o professor não procura explicar tudo, mas sim deixar uma parte importante do trabalho de descoberta e construção do conhecimento para que os estudantes realizem. Este modelo é marcado pela ênfase em tarefas de exploração e investigação, apesar de os exercícios e problemas também possuírem sua relevância.

Este método é um contraponto ao que o autor chama de ensino direto marcado pela centralidade do professor. Neste caso, mesmo que, por vezes, solicitando participação dos estudantes ou propondo algumas tarefas de estrutura aberta, verifica-se uma participação ativa esporádica da turma. Dessa maneira, fazer perguntas objetivas aos estudantes de forma que as repostas sejam um determinado resultado de uma conta, alternativas como *sim* ou *não*, ou até mesmo análises sobre procedimentos previamente encaminhados, não tiram essa centralidade do professor.

Dito isso, uma possibilidade de se introduzir um conteúdo novo é, em vez de apresentar definições e propriedades de imediato, propor aos estudantes tarefas exploratórias. Esse cenário permitirá que eles realizem conjecturas, reflexões e debates sobre o assunto de maneira que, mesmo não chegando à definição formal de forma estrita, consigam se aproximar dela de maneira ativa e não passiva.

Esta metodologia exige o uso do laboratório de informática ou qualquer ambiente — virtual, por exemplo — no qual todos os envolvidos tenham acesso a um computador ou celular com o GeoGebra instalado. Além disso, seria interessante, se possível, que aos estudantes já tenham tido algum contato com o programa em alguma aula anterior.

5.1 Proposta 1

Esta é uma proposta que reúne dois conjuntos de tarefas independentes, mas articuladas. O primeiro conjunto com estrutura fechada (exercícios e problemas) e o segundo com estrutura aberta (explorações e/ou investigações). Antes de iniciar a proposta, que assume o caráter de oficina, os estudantes precisam ser alocados à um contexto que norteará toda a experiência. Serão apresentados à uma situação que envolve um comportamento exponencial associado ao cenário da pandemia provocada pelo Covid-19.

Quadro 4: Tarefa com estrutura fechada

Tarefa: Vitória-régia

Em abril de 2020, período inicial da pandemia do coronavírus, um pesquisador brasileiro propôs um enigma para popularizar a explicação sobre como ocorre a disseminação do vírus e sua multiplicação em crescimento exponencial. Maurício Féo (engenheiro, mestre em Instrumentação pelo Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas e estudante de doutorado em Física de Partículas em Genebra, na Suíça) gravou um vídeo fazendo analogia com vitórias-régias, um lago, e a quantidade dessa planta aquática que é possível tirar do lago, durante um período de tempo. Para isso, considerou que, a cada dia, cada uma das plantas se reproduz gerando outra vitória régia.

Fonte: Informação retirada e adaptada de https://g1.globo.com/bemestar/coronavirus/noticia/2020/04/10/enigma-da-vitoria-regia-vira-exemplo-em-video-que-explica-o-que-e-o-crescimento-exponencial-da-pandemia.ghtml

Com base neste contexto, responda as questões abaixo:

1. Considere que, tal como no contexto anunciado, cada vitória régia se reproduz gerando uma outra ao longo de um dia e que no primeiro dia em que se deseje estudar tal reprodução haja cinco vitórias régias no lago. Qual o número de vitórias régias nos primeiros dias?
2. No GeoGebra, insira as coordenadas dadas pelos pontos (dia, número de vitórias régias) e analise seu comportamento. O que há de característico na forma como se comportam estes pontos?
3. É possível pensar em uma expressão algébrica (“fórmula”) que nos permita encontrar a quantidade de vitórias régias neste lago em um momento qualquer, sem muito trabalho? Insira a expressão algébrica encontrada no GeoGebra e verifique se, de fato, ela descreve o comportamento dos pontos (dia, número de vitórias-régias).
4. Em um determinado momento havia 10240 vitórias régias no lago. Você consegue dizer em qual dia,

provavelmente, isso ocorreu?

Fonte: Elaboração própria

Quadro 5: Tarefa de Estrutura Aberta

Tarefa: Vitória-régia

Em abril de 2020, período inicial da pandemia do coronavírus, um pesquisador brasileiro propôs um enigma para popularizar a explicação sobre como ocorre a disseminação do vírus e sua multiplicação em crescimento exponencial. Maurício Féo (engenheiro, mestre em Instrumentação pelo Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas e estudante de doutorado em Física de Partículas em Genebra, na Suíça) gravou um vídeo fazendo analogia com vitórias-régias, um lago, e a quantidade dessa planta aquática que é possível tirar do lago, durante um período de tempo. Para isso, considerou que, a cada dia, cada uma das plantas se reproduz gerando outra vitória régia.

Fonte: Informação retirada e adaptada de https://g1.globo.com/bemestar/coronavirus/noticia/2020/04/10/enigma-da-vitoria-regia-vira-exemplo-em-video-que-explica-o-que-e-o-crescimento-exponencial-da-pandemia.ghtml

Com base neste contexto, responda as questões abaixo:

1. Considere a situação envolvendo a reprodução das vitórias régias do enunciado e que, portanto, a expressão algébrica que determine esta reprodução em função dos seja dada por $f(x) = 5 \cdot 2^{x-1}$, sendo x os dias e $f(x)$ o número de vitórias-régias correspondente. O que acontece com a expressão algébrica e com seu gráfico se variarmos o número de vitórias régias do primeiro dia ou o número de vitórias régias que uma gera ao longo de cada dia?

Fonte: Elaboração própria

A primeira questão de estrutura fechada possui um grau de desafio reduzido, portanto, um exercício. Importante lembrar que a diversificação dos tipos de tarefas é um dos pontos mais discutidos por Ponte (2005, 2011). Além disso, o fato de uma proposta ser exploratória, não exclui a necessidade de exercícios e problemas, que são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos estudantes que, por sua vez, se baseiam numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados, como é o caso desta primeira questão.

Do ponto de vista das representações semióticas, trata-se de uma conversão da representação em língua natural (na qual se encontra o enunciado) para a representação decimal (na qual os estudantes deverão realizar seus cálculos, ou seja, farão tratamentos).

Espera-se dos estudantes que utilizem técnicas intuitivas para encontrar respostas corretas ao que foi solicitado. Os estudantes podem pensar, tal como indica o enunciado: no primeiro dia há cinco vitórias régias, no segundo, como cada uma gerou uma outra, haverá dez… um outro raciocínio possível que pode ser empregado pelos estudantes é:

2º dia: 5 + 5 (geradas das demais) = 5 × 2 = 10

3º dia: 10 + 10 = 5 × 2 × 2 = 20

4º dia: 20 + 20 = 5 × 2 × 2 × 2 = 40

5° dia: 40 + 40 = 5 × 2 × 2 × 2 × 2 = 80

7º dia: 160 + 160 = 5 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 = 320

Esta conversão (da representação em língua natural para a decimal), apesar de poder ser intuitiva para alguns estudantes, é não congruente por não respeitar a univocidade semântica. Isso se justifica, pois, as unidades significantes da representação inicial *cada uma se reproduz gerando uma outra* se transformou nas unidades significantes *× 2* na representação final (na representação de chegada). Caso a expressão fosse *se duplicasse* poderíamos considerar a congruência semântica.

Importante salientar que é possível que os estudantes não representem a solução tal como está acima, embora encontrando o mesmo resultado. Assim, dispô-lo desta forma, ajuda a generalização que será cobrada em uma tarefa posterior. Além disso, após ou durante a realização da conversão, os estudantes podem cometer erros nos tratamentos algébricos relacionados às operações de soma e multiplicação. Importante, então, o professor estar atento à esta fase.

A segunda questão de estrutura fechada, também na forma de exercício, exige que os estudantes insiram no GeoGebra os pontos *dia, quantidade de vitórias-régias* encontrados anteriormente. Trata-se de uma conversão (da representação em pares ordenados para a representação gráfica) congruente, pois os estudantes farão a correspondência entre pares ordenados e pontos no plano cartesiano (construção do gráfico ponto a ponto). Espera-se que cheguem à seguinte representação conforme Figura 2.

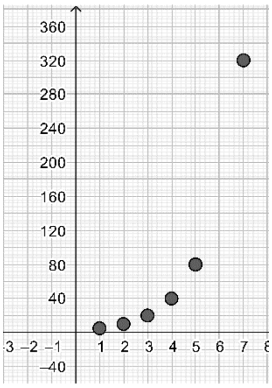


Figura 2: Projeção dos pontos que associam a quantidade de vitórias-régias em função dos dias (Elaboração própria)

Ainda nesta questão, os estudantes terão quer refletir, conjecturar, comparar e recordar algumas propriedades relativas a diferentes tipos de funções, como a afim e a quadrática. Espera-se que, de imediato, eles notem o aspecto curvo do comportamento dos pontos e, com base nisso, descartem a possiblidade de se tratar de uma função afim.

O GeoGebra possui o recurso chamado de *controles deslizantes* por meio do qual é possível inserir uma função com coeficientes indefinidos. Assim, podem ser inseridas diferentes funções e criados controles que permitem variar os valores de seus coeficientes e notar o efeito disso simultaneamente no gráfico.

Espera-se, aqui, que estudantes se convençam que o comportamento do crescimento das vitórias-régias não pode ser linear e nem quadrático — apesar dos pontos descrevem uma linha curva —, uma excelente deixa para o que é exigido em seguida.

Na terceira questão de estrutura fechada há um problema, pois é bem evidente no que exige dos estudantes, além de possuir um grau de desafio alto. Espera-se que cheguem ao modelo $f(x) = 5 \times 2^{x-1}$ (ou $c(d) = 5 \times 2^{d-1}$) ou pelo menos à sua ideia, de forma que, mesmo não encontrando a relação algébrica formal, possam aplicá-la ao menos intuitivamente para encontrar a quantidade de vitórias-régias em um período qualquer.

Há, aqui, uma conversão não congruente, pois, apesar de algumas unidades significantes da representação em língua natural transparecerem de forma única na representação algébrica — como a quantidade inicial de cinco vitórias-régias —, há também a conversão da expressão em língua natural *cada uma se reproduz gerando uma outra* para × *2* na forma algébrica e o *x – 1* no expoente da função que, em língua natural, seria representado por “$dia\ anterior$" o que também não é transparecido no enunciado.

A não congruência semântica desta e de outras conversões exigidas nesta proposta, apesar de, a princípio, denotar um obstáculo, indicam uma relevância epistemológica à tarefa, pois atribui à experiência um caráter desafiador que faz surgirem barreiras epistemológicas, que podem ser derrubadas pela mobilização simultânea de vários registros de um mesmo objeto, permitindo que os estudantes reconheçam o mesmo objeto matemático em diferentes representações semióticas (Duval, 2011, 2012b). Consequentemente, indicará os aspectos que deverão ser discutidos e analisados pelo professor como forma de vislumbrar essa relação existente entre registros de partida e chegada.

Tentar trabalhar o assunto apenas com tratamentos — *dada a função, encontre f*(5) — ou conversões congruentes a um procedimento de encontrar pares ordenados e representá-los no plano cartesiano — *construa o gráfico da função a seguir* —, isso pode gerar uma falsa noção de aprendizagem aos estudantes, ou tornar toda a atividade, ligada ao assunto abordado, banal — muito parecido com o ensino direto, pautado apenas em exercícios e problemas.

Nesta mesma questão, os estudantes deverão inserir as funções descobertas no GeoGebra como forma de atestar e analisar se, de fato, tais modelos descrevem perfeitamente o comportamento dos pontos ao longo do plano cartesiano. Espera-se que exerçam sua autonomia e senso de autoavaliação para investigar suas produções e usar o software para refletir e avaliar possíveis equívocos, uma forma de usar os erros como ferramentas didáticas, e não como penalidades.

A questão quatro, um problema, exige um tratamento algébrico sobre o modelo encontrado na tarefa anterior. Apesar de ser um tratamento simples, dificuldades nesta etapa podem surgir. Os estudantes poderão apresentar o seguinte desenvolvimento:

$$10240 = 5 \cdot 2^{d-1}$$
$$\Rightarrow \frac{10240}{5} = 2^{d-1}$$
$$\Rightarrow 2048 = 2^{d-1}$$
$$\Rightarrow 2^{11} = 2^{d-1}$$
$$\Rightarrow 11 = d - 1$$
$$\Rightarrow d = 12$$

Passando agora para a tarefa exploratória, ela visa trabalhar com a questão fundamental relativa à compreensão na perspectiva das representações semióticas: reconhecer o mesmo objeto matemático em duas ou mais representações distintas, ao discriminar as unidades significantes de cada uma e compreender o que a mudança ou variação de uma afeta na outra.

Apresentamos aqui uma possiblidade de resolução na perspectiva de emular a forma como um estudante pode pensar a resolução desta tarefa. Uma das principais características de tarefas de estrutura aberta é justamente a oportunidade de várias formas de interpretação de resolução de uma mesma tarefa.

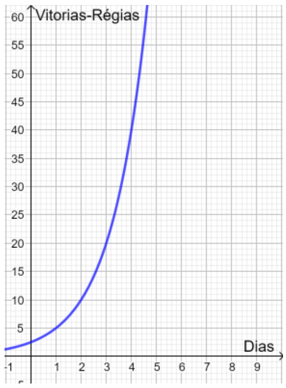
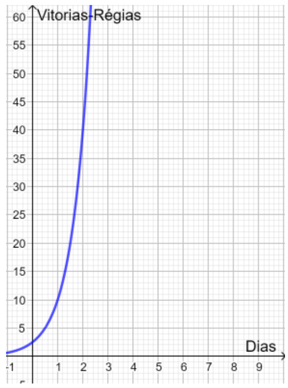
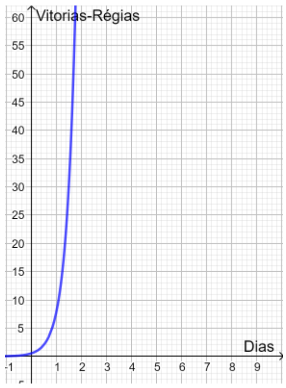
Como dito à priori, esta é uma tarefa independente que poderia, inclusive, ser aplicada sem as anteriores, considerando uma aula em que a modelagem não fosse o foco, mas sim, o estudo do modelo pronto. É comum nos livros didáticos tarefas que apresentam as funções prontas e, com base nelas, os estudantes devem realizar o que se pede — encontrar uma imagem, construir um gráfico etc.

Considerando, então, a função $f(x) = 5 \cdot 2^{x-1}$ com f sendo o número de vitórias-régias em função dos dias (x), espera-se que os estudantes compreendam a unidade significante *5* como referente à quantidade de vitórias-régias no primeiro dia. Além disso, almeja-se que notem que, caso este número mude para seis ou sete, por exemplo, bastaria substituir este valor na expressão algébrica.

Analogamente, a unidade significante *2* na expressão algébrica, remete à duplicação implícita em língua natural do enunciado e que caso, em vez de cada uma gerar uma outra (duplicação), cada uma gerasse outras duas, teríamos uma triplicação — e o 2 seria substituído por 3 na expressão algébrica. O mesmo raciocínio valeria para o caso de quadruplicação, quintuplicação etc.

Com relação à expressão gráfica desta função, espera-se que os estudantes percebam que a mudança na forma de reprodução — triplicação, quadruplicação, ... — ou no número de vitórias-régias no primeiro dia irá modificar a inclinação e a monotonocidade do gráfico, como forme alguns exemplos no Quadro 6.

Quadro 6: Análise gráfica da variação das unidades significantes da função exponencial sem sua representação em língua natural

5 vitórias régias no primeiro dia com cada uma gerando outras duas diariamente	10 vitórias régias no primeiro dia com cada uma gerando outras quatro diariamente
	
8 vitórias-régias no primeiro dia com cada uma gerando outras 15 diariamente	
	

Fonte: Elaboração própria

Entender a relação entre estas três representações é uma forma de induzir que os estudantes reconheçam o objeto matemático *função do tipo exponencial* em várias representações semióticas distintas, de forma intuitiva e não mecânica, de modo que alterar a nomenclatura das variáveis — se $f(x)$, $c(d)$ ou $g(n)$ —, algum coeficiente ou a ordem em que aparecem, não trará dúvidas ou obscurecerá sua percepção quanto ao assunto. Isso pode ocorrer pelo fato de não terem o estudado, ficando presos a exemplos específicos ou em uma aula que privilegia a teoria e o determinismo extremos, em detrimento da prática e da reflexão.

5.2 Proposta 2

Esta é uma proposta que envolve dois conjuntos tarefas independentes, porém articulados. O primeiro, uma tarefa investigativa/exploratória, e o segundo com tarefas de estrutura fechada. Aqui os estudantes deverão fazer o estudo do processo de aquecimento de um líquido até a temperatura ambiente, empregando a Lei de Resfriamento de Newton.

Quadro 7: Tarefa de Estrutura Aberta

Tarefa: Experiência com a Lei de Resfriamento de Newton

A lei de resfriamento de Newton determina que a perda de calor de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a ambiente. Utilizando este princípio, cada grupo fará o estudo de um copo de água previamente refrigerado posto em temperatura ambiente. Serão necessários 150 ml de água (à uma temperatura de cerca de 2° C) em um copo de vidro, um termômetro culinário e acesso ao GeoGebra. O ambiente precisa ter temperatura ambiente estável, devendo ser, então, fechado.

1. Insira a função $f(x) = b \cdot a^{c \cdot x} + d$ e no GeoGebra, reflita e faça anotações no caderno sobre os seguintes aspectos:
   a) O que acontece com o gráfico quando manipulamos apenas o coeficiente a?
   b) O que acontece com o gráfico quando manipulamos apenas o coeficiente d?
   c) O que acontece com o gráfico quando manipulamos apenas o coeficiente b?
   d) O que acontece com o gráfico quando manipulamos apenas o coeficiente c?
2. O que mais você observou ao realizar essa tarefa?

Fonte: Elaboração própria

Quadro 8: Tarefa de Estrutura Fechada

Tarefa: Experiência com a Lei de Resfriamento de Newton

A lei de resfriamento de Newton determina que a perda de calor de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a ambiente. Utilizando este princípio, cada grupo fará o estudo de um copo de água previamente refrigerado posto em temperatura ambiente. Serão necessários 150 ml de água (à uma temperatura de cerca de 2° C) em um copo de vidro, um termômetro culinário e acesso ao GeoGebra. O ambiente precisa ter temperatura ambiente estável, devendo ser, então, fechado.

1. Com o termômetro, meça e anote a temperatura ambiente. Em seguida, meça e anote a temperatura do líquido em intervalos fixos (de 5 em 5 min, 2 em 2 min, por exemplo) por um período de 30 a 50 min[3].
2. Insira os pontos (momento, temperatura) e a função $f(x) = b \cdot a^{c \cdot x} + d$ no GeoGebra e, utilizando os ajustes dos coeficientes no GeoGebra, encontre uma função que melhor modele o comportamento dos dados coletados.
3. Utilizando o modelo algébrico proposto por Newton, encontre a função que modela o comportamento dos dados coletados.

Fonte: Elaboração própria

Os estudantes deverão ser agrupados em trios e o professor, após os estudantes já terem tido contato com a definição e os preceitos básicos das funções exponenciais — a partir da proposta 1, por exemplo —, deverá levantar uma discussão sobre a lei de resfriamento de Newton, sem exibir o modelo propriamente dito, e deverá apresentar aos estudantes a função

[3] Tanto os intervalos quanto a duração total da experiência (considerando um tempo mínimo de 30 min) ficam a critérios do professor e da sua disponibilidade de tempo. Importante, contudo, que todos realizem as medições por um mesmo período.

do tipo exponencial dada por $f(x) = b \cdot a^{c \cdot x} + d$.

Como dito, as funções com comportamento exponencial são modelos de uma série de fenômenos naturais, como os de crescimento e reprodução de plantas ou bactérias, conforme explorado na proposta anterior. Uma destas aplicações é a lei do resfriamento de Newton, que considera a taxa de variação de temperatura de um corpo, em resfriamento em função do tempo $T(t)$, é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo (T) e a temperatura constante do meio ambiente (T_m) (Zill e Cullen, 2001). Desta forma, temos a relação $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$.

Tomando por hipótese que a temperatura do objeto dependa do tempo e seja a mesma em todos os pontos do líquido observado, que a temperatura ambiente seja constante durante o experimento e que a taxa de variação da temperatura obedeça a lei de resfriamento de Newton (conforme acima), por meio de uma Equação Diferencial Ordinárias (EDO), chegamos ao seguinte modelo $T(t) = C \cdot e^{k \cdot t} + T_m$ no qual C é a diferença entre a temperatura ambiente (T_m) e a temperatura inicial do corpo e k uma constante de proporcionalidade, que depende da superfície exposta, do calor específico do corpo e das características do meio (Sias e Teixeira, 2006). Entre as muitas aplicações deste modelo estão a possiblidade de estimar a hora da morte de uma pessoa e prever o momento em que o leite atingirá a temperatura ideal (antes que ferva) no preparo de iogurte caseiro.

Esta proposta assume o caráter de ensino e aprendizagem exploratórios propostos por Ponte (2005), no qual os dados não serão entregues prontos e sim coletados e cada grupo terá a oportunidade de criar um modelo próprio além de poder verificar, com suporte do professor, se de fato sua função descreve o comportamento analisado. Trata-se, também, de uma proposta em contexto de realidade.

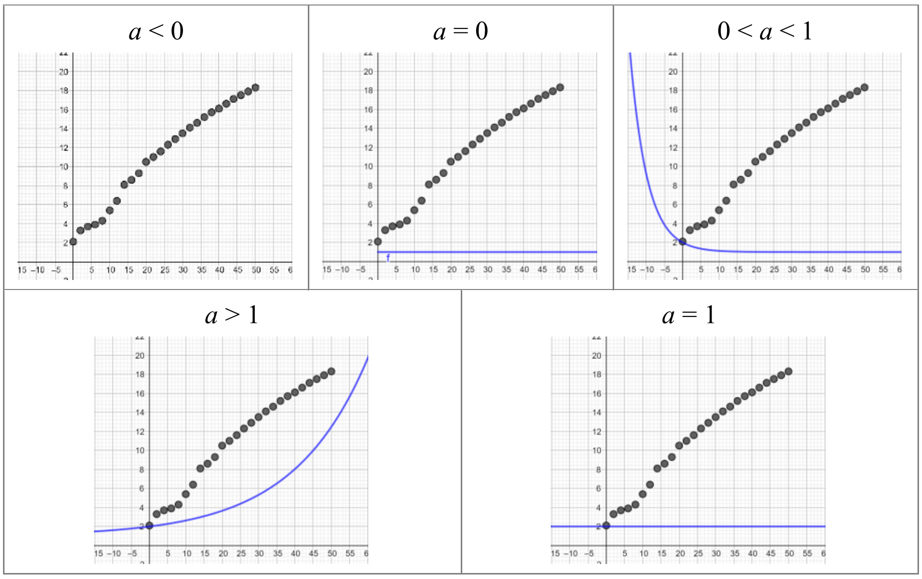
Do ponto de vista das representações semióticas (Duval, 2011, 2012b), os estudantes terão a oportunidade de trabalhar simultaneamente com quatro representações semióticas: a tabular, a gráfica, a algébrica e a língua natural (no momento de interpretar seus resultados).

Faremos a descrição do método nos embasando em resultados de nossas próprias medições com os mesmos materiais e condições supracitadas. Como dito à princípio, esta é uma tarefa independente que poderia ser aplicada de forma isolada, sem contexto de aplicação, ou associada a outras aplicações em outras áreas — Biologia, por exemplo. Nesta tarefa investigativa os estudantes se depararão com uma situação aberta, sobre a qual terão quer fazer análises e conjecturas a partir das quais deverão encontrar regularidades e deduzir propriedades importantes sobre a função exponencial. A estrutura aberta se justifica pelo caráter indeterminado das respostas e da forma como os estudantes podem às apresentar. É esperado que na análise dos coeficientes os estudantes façam anotações e tentem explicar, cada qual de sua forma, o comportamento que veem e as possíveis justificativas.

Ao manusear o controle do coeficiente a, mantendo os demais iguais a 1, por exemplo, os estudantes poderão perceber cinco comportamentos distintivos, tal como no Quadro 9. Esta é uma oportunidade de descobrir e discutir algumas propriedades aplicadas à base desta função, como sua condição de existência correlacionada à impossibilidade da base negativa e o estudo de sua monotonocidade.

Com o formato exponencial tomado pela função, por meio da manipulação de a, surge uma boa oportunidade de se discutir o coeficiente d. Deverão perceber que, na representação geométrica, a variação deste coeficiente provoca uma translação vertical e representa uma assíntota horizontal. Do ponto de vista da representação em língua natural — com relação à temperatura, por exemplo — espera-se que os estudantes assimilem que o d precisa ser o direcionamento da temperatura do líquido com o passar do tempo, de forma que fique próximo e estabilizado, ou seja, a temperatura ambiente, tal como na Figura 3, sendo a reta verde pontilhada a assíntota horizontal.

Quadro 9: Correspondência entre as representações gráfica e algébrica à partir da manipulação do coeficiente a



Fonte: Elaboração própria

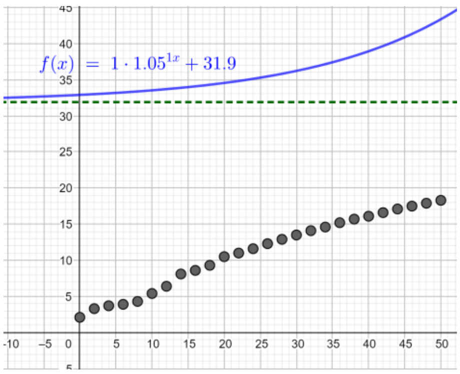


Figura 3: Gráfico de $f(x)$ para $a > 1$, $c > 0$, $b > 0$ e $d = 31{,}9$ (Elaboração própria)

Os coeficientes b e c provocam no gráfico o mesmo comportamento: alteram sua inclinação e seu status de crescimento, assim como o coeficiente a. Na perspectiva de uma aplicação, modificam a velocidade e a forma com a qual o fenômeno estudado muda até (ou a partir) de sua estabilidade (assíntota). Mantendo os demais coeficientes fixos — $a = 1{,}05$, $c = 1$ e $d = 31{,}9$ — verificamos a influência de b sobre o gráfico, tal como na Figura 4.

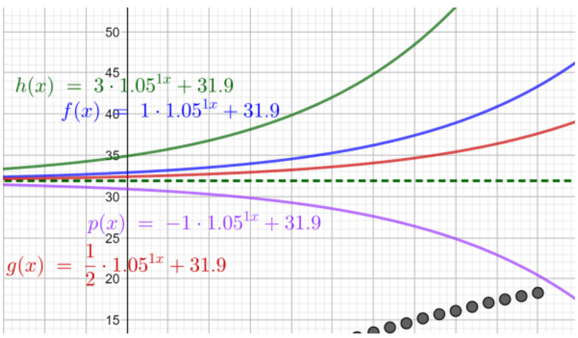


Figura 4: Diferentes comportamentos provocados pela manipulação de b (Elaboração própria)

Os estudantes poderão perceber, ainda, analisando $p(x)$ e $f(x)$, que a função sofre uma reflexão em torno da assíntota para valores negativos de b. Além disso, é importante entenderem que para $b = 0$ temos $f(x) = d$, portanto, uma reta. De forma geral, almeja-se que percebam três comportamentos distintivos para b quando é negativo, nulo e positivo.

Podemos reescrever a função $f(x) = b \cdot a^{c \cdot x} + d$ como $f(x) = b \cdot (a^c)^x + d$, usando algumas propriedades de potenciação. Desta forma, temos que c modifica potencialmente a base a e, por isso, incide sobre a inclinação da curva e sua condição de crescimento e decrescimento de forma mais "rápida". Mantendo os demais coeficientes fixos — $a = 1{,}05$, $b = 1$ e $d = 31{,}9$ —, verificamos a influência de c sobre o gráfico na Figura 5.

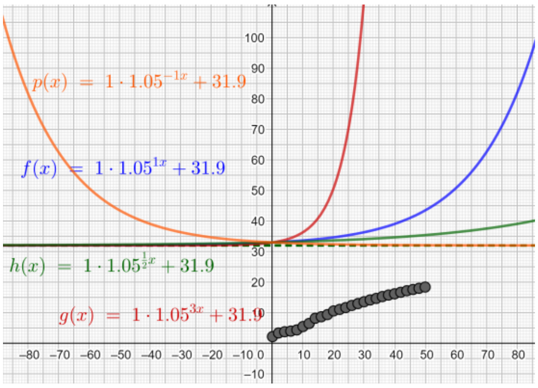


Figura 5: Diferentes comportamentos provocados pela manipulação de *c* (Elaborado pelos autores)

Os estudantes poderão perceber, também, que valores negativos de c, enquanto os demais coeficientes constantes, provocam uma reflexão da função em torno do eixo das ordenadas (IF-USP, 2000), tal como evidenciado pela comparação entre as funções $p(x)$ e $f(x)$ na imagem anterior. Em suma, espera-se que anotem três comportamentos distintivos pra c, quando é negativo, nulo e positivo.

É colocada, ainda, uma questão que indaga o estudante sobre o que mais ele observou ao realizar esta tarefa. É uma oportunidade de instigá-lo a fazer o estudo de regularidades e trabalhar seu senso crítico sobre o que acabara de fazer. Todos ficarão livres para expor seus pontos de vista sobre a forma com a tarefa foi realizada e o professor poderá utilizar tais pareceres para verificar se os objetivos desta primeira etapa da proposta foram atendidos.

A seguir será discorrida a tarefa de estrutura fechada. Empregamos o termômetro culinário Clink (Figura 6) que tem um funcionamento e comandos simples, além do baixo custo. Em nosso experimento a temperatura ambiente foi de 31,9 °C.

Figura 6: Início do experimento (Elaboração própria)

Uma possiblidade de organização dos dados é, após a coleta, sua inserção em uma tabela. Realizando uma simulação e registrando os dados numéricos em intervalos de tempo de dois minutos, tal como os estudantes poderão fazer, chegamos à seguinte Tabela 1:

Tabela 1: Registro do processo de aquecimento da água em função do tempo

Momento (Min)	Temperatura (°C)	Momento (Min)	Temperatura (°C)
0	2,1	26	12,3
2	3,3	28	12,9
4	3,7	30	13,5
6	3,9	32	14,1
8	4,3	34	14,6
10	5,4	36	15,2
12	6,4	38	15,7
14	8,1	40	16,1
16	8,6	42	16,6
18	9,3	44	17,1
20	10,5	46	17,5
22	11	48	17,9
24	11,6	50	18,3

Fonte: Elaboração própria

Aqui, percebemos o tratamento na representação tabular, cuja relevância está na organização e sistematização dos dados, para que seja possível seguir para as próximas etapas.

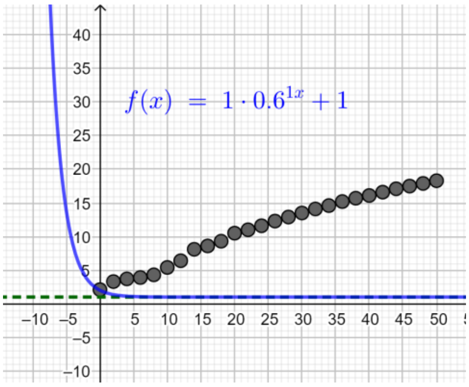
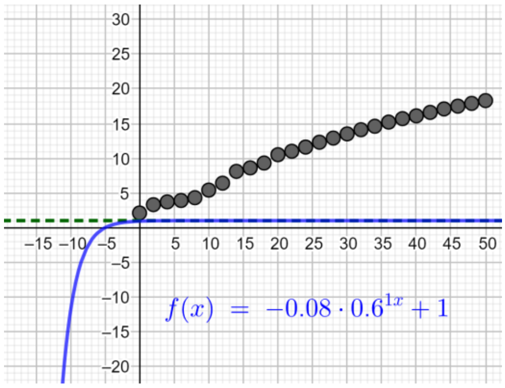
Empregamos o termômetro culinário Clink (Figura 6) que tem um funcionamento e comandos simples, além do baixo custo. Em nosso experimento a temperatura ambiente foi de 31,9 °C.

Ao inserir os pontos (momento, temperatura) no GeoGebra, os estudantes realizarão uma conversão congruente da representação tabular para a gráfica por meio da técnica de construção de gráficos ponto a ponto.

No GeoGebra, ao inserir a função $f(x) = b \cdot a^{c \cdot x} + d$, serão gerados controles deslizantes para os coeficientes b, a, c e d. Todos serão, inicialmente, por padrão, iguais a 1. Tais coeficientes são unidades significantes da representação algébrica, cuja manipulação permite variações comparativas, relativas à significação das representações semióticas. Isso permite a análise do comportamento do gráfico, ao se manipular cada coeficiente, mantendo os demais constantes (Duval, 2012b). Desta forma, os estudantes poderão estabelecer a relação existente entre gráfico e expressão algébrica, sem se prenderem a processos mecânicos, além de permitir que analisem as diferentes configurações visuais que a função exponencial pode assumir.

Encontrar o modelo usando os ajustes dos controles deslizantes pode ser considerando um problema, porém o grau de desafio poderá ser menor após os estudantes fazerem o estudo dos coeficientes na tarefa de estrutura aberta do início da proposta. Neste momento, os estudantes terão liberdade para manusear os controles deslizantes dos coeficientes da função com base nas propriedades verificadas e discutidas até então. Seria interessante se, nesta etapa, todos voltassem para os coeficientes iguais a 1. Caso algum grupo opte, neste caso, por começar estabelecendo $0 < a < 1$, podem seguir a ordem de raciocínio sistematizado no Quadro 10 para se chegar à configuração visual desejada.

Quadro 10: Uma forma de se modelar função para corresponder aos dados coletados usando as propriedades dos coeficientes

Estabelecendo $0 < a < 1$, temos: Uma função decrescente até a assíntota	Em seguida, colocando $b < 0$, temos: Uma reflexão em torno da assíntota e, portanto, uma função crescente até a assíntota
	

Fonte: Elaboração própria

Neste caso, já temos o comportamento necessário: a temperatura cresce até se estabilizar. O que é preciso ser feito agora é uma adequação dos valores dos coeficientes, se mantendo no Caso 4 do Quadro 1 (apresentado na introdução deste artigo), ou seja, $0 < a < 1$, $b < 0$ e $c > 0$. Deverão levar em conta, também, a adequação do coeficiente d como a temperatura ambiente ou o momento de estabilização. Desta forma, podemos chegar ao seguinte gráfico da Figura 7.

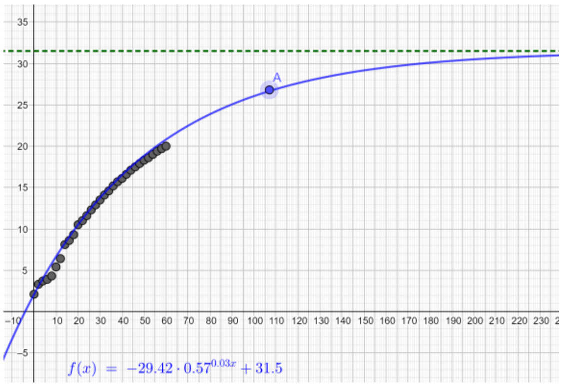


Figura 7: Uma proposta de modelo aproximado para o aquecimento do líquido analisado (Elaboração própria)

Ajustamos os coeficientes almejando simular o que um estudante poderia fazer dado que, até então, não conheceria a lei de resfriamento de Newton e os significados exatos de alguns coeficientes — como a base igual a e. Além disso, em nosso experimento, monitoramos o líquido para além de 60 minutos e anotamos, após a função criada, o estado da temperatura no minuto 107 — para verificarmos a eficiência do nosso modelo. Assim, foi registrado 26,8 °C que corresponde ao ponto A do gráfico anterior e reforça o grau de correlação entre a função e o comportamento natural térmico da água.

É interessante, assim, que os estudantes façam este exercício de verificação da validade de seus modelos tanto com relação aos dados já inseridos no gráfico, bem como, com o estado posterior do líquido em questão, dado que a projeção e previsão de dados constituem um dos principais objetivos da modelagem (Bassanezi, 2018).

As representações algébrica e gráfica são muito associadas ao estudo das funções, e evocam a análise de congruência semântica entre estes dois registros, fenômeno este muito discutido por Duval (2011, 2012b). Como muito debatido, a passagem da representação algébrica para a gráfica da função do tipo exponencial pode ser feita pelo que o pesquisador chama de abordagem ponto a ponto, configurando sua congruência semântica.

Na análise inversa, contudo, percebemos, por exemplo, que a monotonicidade da curva exponencial está diretamente relacionada ao comportamento de três unidades significantes da expressão algébrica (a, b e c). Isso indica que não é preservada na análise Gráfico → Lei algébrica o critério da univocidade semântica, configurando, dessa forma, a não congruência semântica desta passagem. De uma forma geral, a conversão da representação gráfica para a algébrica exige uma interpretação global (Duval, 2011).

Tal interpretação depende do reconhecimento de todos os valores das variáveis visuais do gráfico e de seus correspondentes na expressão simbólica. Nesta proposta, a análise simultânea da correlação entre coeficiente e a curva por meio do GeoGebra permite que o estudante faça o estudo dessa relação, explorando-a, por conta própria.

Em seguida, vem o trabalho formal com a Lei de Resfriamento propriamente dita, no qual os estudantes conhecerão a expressão algébrica e seus reais coeficientes dados por $T(t) = (T_{\circ} - T_m)e^{k \cdot t} + T_m$, em que $T_{\circ}$ é a temperatura inicial do corpo (nosso caso, $2{,}1°C$) e T_a a temperatura ambiente ($31{,}9°C$) com $k < 0$. Esta questão assume o status de problema por sua natureza fechada e grau mais elevado de desafio, que tem como principal virtude oferecer aos estudantes uma efetiva experiência matemática.

Além da relevância e necessidade dos momentos de exposição em práticas exploratórias, Ponte (2005) também salienta a importância da reflexão e debate sobre o objeto matemático, com o qual se está trabalhando. Isso é necessário para que não haja o risco de informações importantes não serem evidenciadas ou que os estudantes fiquem confusos sobre o que estão aprendendo e com qual finalidade.

Ao serem apresentados ao modelo de Newton acima, um dilema pode surgir: esta função (pensando no modelo $f(x) = b \cdot a^{c \cdot x} + d$) está definida para $a = e$, ou seja, $a > 1$, além de $c < 0$, enquanto que em nosso modelo encontrado na Figura 7, temos $0 < a < 1$ e $c > 0$. Tal como nós, algum grupo pode chegar neste mesmo resultado, apesar de também ser possível que, experimentalmente, cheguem, aproximadamente, ao modelo de Newton. A resposta para isto está no Quadro 1, exibido na introdução deste artigo, no qual apresentamos as configurações gráficas visualmente distintas da função do tipo exponencial. No Caso 04, afirmamos que este comportamento (crescimento até uma assíntota) ocorre em dois casos. Um deles foi o encontrado em nossa manipulação ($0 < a < 1$, $b < 0$ e $c > 0$) e o outro é o que corresponde à lei de Newton ($b < 0$, $a > 1$ e $c < 0$).

Além de esta equivalência poder ser verificada graficamente por meio dos controles deslizantes, é possível constatá-la por um tratamento algébrico sobre a função f encontrada (Figura 7). Desse modo, apliquemos a mudança de base sobre f, desconsiderando a constante $d = 31{,}5$, por ela ser a mesma em ambos os casos (pois, de todo modo, a temperatura ambiente não pode sofrer mudanças). Desta forma, temos $h(x) = y = -29{,}42 \cdot 0{,}57^{0{,}03 \cdot x}$. Aplicando ln em ambos os membros da equação, obtemos:

$$\ln y = \ln(-29{,}42 \cdot 0{,}57^{0{,}03 \cdot x})$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln -29{,}42 + \ln 0{,}57^{0{,}03 \cdot x}$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln -29{,}42 + 0{,}03 \cdot \mathrm{x} \cdot \ln 0{,}57$$

$$\Rightarrow y = e^{\ln -29{,}42 + 0{,}03 \cdot x \cdot \ln 0{,}57}$$

$$\Rightarrow y = e^{\ln -29{,}42} \times e^{0{,}03 \cdot x \cdot \ln 0{,}57}$$

Usando a propriedade que afirma que $e^{\ln a} = a$ e que $\ln 0{,}57 \cong -0{,}5621$, encontramos

$$y = -29{,}42 \cdot e^{-0{,}01686 \cdot x}$$

Logo, $g(x) = -29{,}42 \cdot e^{-0{,}01686x} + 31{,}5$ é uma função algebricamente equivalente à $f(x)$, como ilustrada na Figura 8.

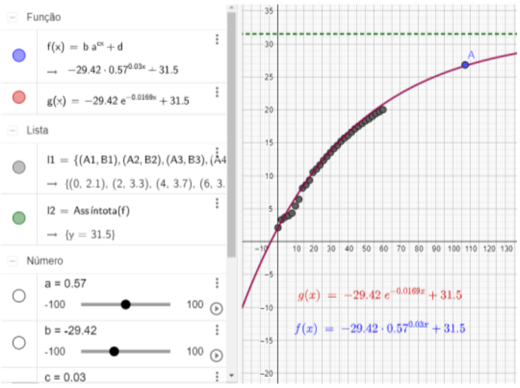


Figura 8: Comparação gráfica das funções $f(x)$ e $g(x)$ (Elaboração própria)

Para finalizar, os estudantes podem encontrar tal modelo usando estritamente a função algébrica de resfriamento. Aqui, inclusive, eles poderão constatar que o coeficiente b representa a diferença entre a temperatura ambiente e a temperatura inicial do corpo resfriado, uma outra correspondência entre as representações algébrica e em língua natural (enunciado) deste objeto. Substituindo os demais coeficientes e usando o ponto $(30, 13.5)$ para encontrar a constante k da lei, temos:

$$(2{,}1 - 31{,}9) \cdot e^{30 \cdot k} + 31{,}9 = 13{,}5$$

$$-29{,}8 \cdot e^{30 \cdot k} = 13{,}5 - 31{,}9$$

$$\Rightarrow e^{30 \cdot x} = \frac{-18{,}4}{-29{,}8}$$

$$\Rightarrow \ln e^{30 \cdot k} = \ln \frac{18{,}4}{29{,}8}$$

$$\Rightarrow 30 \cdot k \cdot \ln e = \ln \frac{18{,}4}{29{,}8}$$

$$\Rightarrow 30 \cdot k = \ln \frac{18{,}4}{29{,}8}$$

$$\Rightarrow k = \frac{\ln \frac{18{,}4}{29{,}8}}{30}$$

$$\Rightarrow k \cong -0{,}01607$$

Logo, a função de resfriamento, usando a lei formal, será dada por

$$p(x) = -29{,}8 \cdot e^{-0{,}01607 \cdot x} + 31{,}9$$

graficamente representada, tal como a Figura 9.

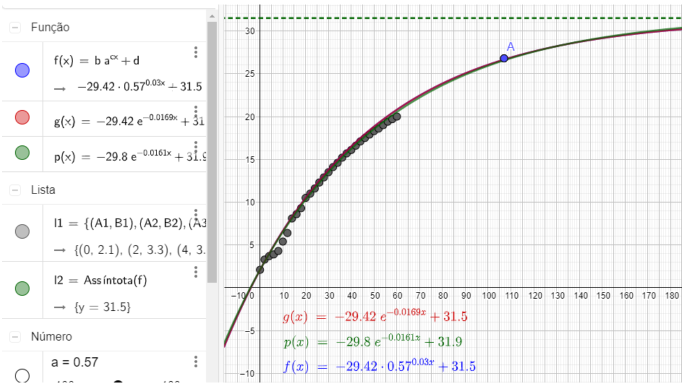


Figura 9: Comparação gráfica entre as três funções encontradas para o comportamento térmico analisado (Elaboração própria)

Estes últimos tratamentos algébricos exigem, de fato, a aplicação de algumas propriedades de potências e logaritmos. Por isso, sua aplicação depende de uma série de fatores relacionados à turma e seus conhecimentos prévios. Esta proposta é recomendada, no entanto, para um encerramento do assunto, após, por exemplo, a aplicação da Proposta 1 aqui apresentada, quando os estudantes já tenham tido algum contato precedente básico com as funções, com comportamento exponencial. Também pode ser aplicada antes ou durante o estudo da função logarítmica, dado que, geralmente, é posterior à função exponencial e mantém com esta uma relação estreita por se constituir como sua inversa.

6 Considerações finais

O objetivo foi propor tarefas matemáticas envolvendo as funções do tipo exponencial com o emprego do software GeoGebra. Para isso, nos ancoramos nos estudos sobre o conceito e classificação de tarefas de Ponte (2005) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2017).

A partir da proposição das tarefas, acreditamos que um dos principais aspectos que o professor deve levar em conta no momento de planejar e executar qualquer intervenção em sala de aula — desde a aula mais comum até àquela envolvendo experimentos — é a natureza e a diversificação das tarefas que irá aplicar. Para isso, é necessário considerar o tema proposto, os objetivos de aprendizagem, a competência e as habilidades que deseja explorar, além de considerar as características cognitivas e sociais dos estudantes com quem trabalhará.

Nos concentramos nos tipos de tarefas definidos por Ponte (2005, 2012a), que considera a existência de virtudes específicas relacionadas ao emprego de cada tarefa, como aquelas de natureza mais acessível (explorações e exercícios). Tal fato permite aos estudantes um certo grau de sucesso, favorecendo sua autoconfiança. Além disso, há propostas que se beneficiam de tarefas mais desafiantes (problemas e investigações), possibilitando uma efetiva experiência matemática aos estudantes.

As funções exponenciais são modelos aplicados para análise e descrição de uma série de fenômenos físicos, químicos e econômicos e isto é um dos principais fatores que embasam a relevância epistemológica do conteúdo que é enfatizada na BNCC (Brasil, 2017) e, consequentemente, nos livros didáticos. Assim, neste trabalho, nos concentramos em duas propostas de tarefas, pensando em como introduzir o conteúdo (Proposta 1) e como consolidá-lo (Proposta 2). Esperamos, assim, que a partir da proposição apresentada, ao desenvolvê-la em situações reais de sala de aula, o professor tenha uma orientação de como explorar todas as potencialidades do conteúdo levando em conta a natureza das tarefas supracitadas, seus registros de representação semiótica e a ferramenta GeoGebra.

O GeoGebra permite o trabalho simultâneo com as representações tabular, algébrica e gráfica destas funções, além de viabilizar a relação delas com o contexto no qual se discute o conteúdo. Ou seja, sua representação em língua natural. Duval (2012b), inclusive, ratifica que esta representação não deve ser negligenciada no ensino de Matemática na Educação Básica, por ser tão essencial quanto os demais tipos, particularmente aqueles em que os tratamentos e cálculos são possíveis.

Poder entender a correlação existente, principalmente, entre expressão algébrica, gráfico e contexto (de forma simultânea), é um dos aspectos que justificam a importância do GeoGebra no momento de permitir aos estudantes reconhecer, aqui, a função exponencial e as funções do tipo exponencial em mais de um registro. Nessa direção, poderá perceber a relação existente, por exemplo, entre um coeficiente algébrico, a inclinação geométrica e a velocidade com a qual a temperatura de um determinado líquido aquece ou esfria, até sua temperatura ambiente que, por sua vez, se constitui como uma unidade significante distintiva que na expressão algébrica aparece como uma constante que se soma a uma função do tipo exponencial $f(x) = b \cdot a^{c \cdot x}$ e que no plano cartesiano é uma assíntota horizontal.

O professor pode, então, mediar a exploração de uma série de conceitos, ao mesmo tempo, fazendo conexões entre registros de representação semiótica com os estudantes, podendo estudar e analisar o que a variação de uma unidade significante em um altera e influi no outro (Duval, 2012a, 2012b, 2017). O caráter experimental que o GeoGebra atribui a aula é, desta forma, um elemento didático importante, que permite à classe o desenvolvimento de sua autonomia e que vivenciem e simulem experiências matemáticas exploratórias centradas em conjecturas, testes e descobertas. Tal ação será um contraponto ao ensino direto discutido por Ponte (2005), no qual as informações lhe são dadas prontas e tem como característica marcante a passividade do estudante.

Desta forma, o ensino exploratório é beneficiado pela articulação de registros das funções exponenciais com suporte do GeoGebra, por meio do qual é possível instigar discussões interessantes entre professor e estudantes, sem que estes fiquem presos a respostas direcionadas ou a perguntas objetivas do professor. Propostas como a 2 permitem este tipo de situação, por colocar os estudantes como sujeitos ativos no processo de matematizar um comportamento natural e que lhes permite descobrir, por conta própria, certas propriedades e, principalmente, se depararem com obstáculos que podem ser excelentes motivadores didáticos.

Ratificamos a importância da postura do professor neste tipo de intervenção que não deve ser esporádica e nem ficar restrita a determinados métodos. O fato de não ser a única figura central que veicula a aula e que propõem os questionamentos, não limita a ação do professor, mas sim, expande suas possiblidades de interação com a classe e abordagem do assunto. Fica claro, aqui, que tal metodologia exploratória não exclui a aplicação de tarefas de estrutura fechada, muito menos a necessidade da aula expositiva.

Em vários momentos de ambas as propostas, surgem brechas que necessitam tanto de uma boa explicação teórica do assunto — assíntota, mudanças de base, aspectos históricos, propriedades e demonstrações básicas sobre potências e logaritmos — como também de tarefas que, antes ou depois de cada proposta, objetivem compreender e praticar alguns conceitos (exercícios e problemas). Tudo é uma questão de diversificar e saber aplicar no momento certo cada tipo de tarefa, de quanto usar e se explorar criticamente o livro didático, além de identificar tipos de propostas que beneficiam o estudo de um dado conteúdo.

Lembrando, ainda, que, mesmo em se tratando de uma tarefa de estrutura aberta, é essencial que o professor mantenha certo grau de condução da aula, dado que é fácil os estudantes se perderem em devaneios e não conseguirem chegar às competências desejadas, em decorrência do aspecto muito *livre* da aula.

Esta pesquisa pode inspirar outros pesquisadores e professores a realizar estudos de outros objetos matemáticos, com a mesma abordagem ou outros métodos exploratórios envolvendo as funções com comportamento exponencial, por modelarem uma série de outros fenômenos que podem ser replicados ou analisados em sala de aula.

Referências

BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:* uma nova estratégia. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2018.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *SAEB*. Brasília: INEP, 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular:* Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEB, 2017.

CARVALHO, Rodrigo Lacerda. *Contribuições do campo conceitual multiplicativo para a formação inicial de professores de Matemática com suporte das tecnologias digitais*. 2017. 182f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Ceará. Fortaleza.

COELHO, José Renato Paveis. *O GeoGebra no ensino das funções exponenciais*. 2016. 97f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Estadual do Norte Fluminense. Campos dos Goytacazes.

DUVAL, Raymond. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. *Revemat*, v. 7, n. 1, p. 97-117, jan./jun. 2012a.

DUVAL, Raymond. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. *Revemat*, v. 6, n. 2, p. 96-112, jul./dez. 2011.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. *Revemat*, v. 7, n. 2, p. 266-297, jul./dez. 2012b.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e o funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *Aprendizagem em Matemática:* registros de representação semiótica. São Paulo: Papirus, 2017, p. 11-34.

FARIA, Taís Aparecida; SOUZA JÚNIOR, José Carlos de; CARDOSO, Andréa. Matemática Dinâmica para compreender a função exponencial. *Sigmae*, v. 5, n. 1, p. 1-11, 2016.

FERREIRA, Rodrigo dos Santos; PEREIRA DA COSTA, André. Função exponencial e GeoGebra: o que vem sendo discutido na literatura brasileira?. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, v. 10, n. 1, p. 108-128, 2021.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo. *Métodos de pesquisa*. Porto Alegre: EdUFRGS, 2009.

GIL, Antônio Carlos. *Como Elaborar Projetos de Pesquisa*. São Paulo: Atlas, 2002.

GOLDONI, Elizangela. Matemática aplicada ao estudo da área ocupada pelo crescimento de micro-organismos como ferramenta para o ensino da função exponencial. *Professor de Matemática On Line*, v. 7, n. 2, p. 166-174, 2019.

HILLESHEIM, Selma Felisbino; MORETTI, Méricles Thadeu. Alguns aspectos da noção da congruência semântica presentes no ensino dos números inteiros relativos. *Espaço Pedagógico,* v. 20, n. 1, p. 119-135, out./dez. 2013.

HOHENWARTER, Markus; FUCHS, Karl Josef. Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. In: *Proceedings of Sprout-Slecting Conference*. Áustria, 2004, p. 128-133.

IF-USP (São Paulo). *Função Exponencial*. 2000. Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/exponencial/fexponencial.htm; acesso 20 fev. 2021.

LIMA, Elon Lages. *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MARTINS, Tiago; DOERING, Luiza; BARTZ, Mauro. Utilização do GeoGebra na resolução de problemas físicos: uma possibilidade para a modelagem matemática na Educação Básica. *Revista Thema*, v. 14, n. 2, p. 225-235, abr./jun. 2017.

MORETTI, Méricles Thadeu. O papel dos registros de representação semiótica na aprendizagem em Matemática. *Contrapontos*, v. 2, n. 3, p. 343-362, set./dez. 2002.

PEREIRA DA COSTA, André.; ROSA DOS SANTOS, Marilene. O pensamento geométrico na licenciatura em Matemática: uma análise à luz de Duval e Van-Hiele. *Educação Matemática Debate*, v. 4, n. 10, p. 1-20, 2020.

PIANO, Catia. *Diferentes abordagens para o estudo das funções exponenciais e logarítmicas*. 2016. 112f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco.

PONTE, João Pedro da; QUARESMA, Marisa; BRANCO, Neusa. Tarefas de exploração e investigação na aula de Matemática. *Educação Matemática em Foco*, Lisboa, v. 1, n. 1, p. 9-29, 2011.

PONTE, João Pedro. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Org.). *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM, 2005, p. 11-34.

PONTE, João Pedro. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, João Pedro. (Org.). *Práticas profissionais dos professores de Matemática*. Lisboa: Instituto de Educação, 2014, p. 13-30.

PONTE, João Pedro; QUARESMA, Marisa; MATA-PEREIRA, Joana; BAPTISTA, Mónica. Exercícios, problemas e explorações: perspectivas de professoras num estudo de aula. *Quadrante*, Lisboa, v. 24, n. 2, p. 111-134, 2015.

REZENDE, Wanderley Moura; PESCO, Dirce Uesu; BORTOLOSSI, Humberto José. Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, v. 1, n. 1, p. 74-89, 2012.

SANTOS, Adriana Tiago; BIANCHINI, Barbara Lutaif. Análise das estratégias utilizadas pelos estudantes no estudo de funções logarítmicas e exponenciais. *Vidya*, v. 32, n. 1, p. 35-50, jan./jun. 2012.

SIAS, Denise Borges; TEIXEIRA, Rejane Maria Ribeiro. Resfriamento de um corpo: a aquisição automática de dados propiciando discussões conceituais no laboratório didático de Física no Ensino Médio. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 23, n. 3, p. 360-381, jan./dez. 2006.

SILVA, Diego Souza da; LAZZARIN, João Roberto. Funções: construindo conceitos a partir da análise gráfica. *Revista Ciências Exatas e Naturais,* v. 20, n. 1, p. 91-104, jan./jun. 2018.

SILVA, Izabella Batista; PRANDO, Giovani; GUALANDI, Jorge Henrique. Contribuições da Teoria dos Registros de Representação Semiótica para a análise do capítulo de funções de um livro didático. *Educação Matemática Debate*, v. 4, n. 10, p. 1-16, 2020.

SILVA, Wendel Oliveira. Kit Virtual de Apoio: uma proposta para o ensino de gráficos de funções. In: *Anais do II Colóquio Luso-Brasileiro de Educação*. Joinville, 2016, p. 594-606.

SOUSA, Emerson Silva de; VIALI, Lorí; RAMOS, Maurivan Güntzel. Construção e análise de modelos exponenciais de forma significativa: uma experiência de ensino em sala de aula. *Revista Exitus*, v. 7, n. 2, p. 55-75, 26 maio/ago. 2017.

ZILL, Dennis; CULLEN, Michael. *Equações Diferenciais:* volume 1. Tradução de Antonio Zumpano. São Paulo: Pearson, 2001.