



Atividade didática sobre a adição e subtração de frações embasada na metodologia Aprendizagem Baseada em Problemas

Resumo: No presente artigo, fez-se um estudo teórico sobre a dificuldade em aprender o tópico da adição e subtração de frações. Para isso, efetuou-se uma revisão da literatura brasileira, na qual verificou-se que não existem atividades didáticas que abordem simultaneamente o ensino da adição (subtração) de frações e o desenvolvimento do raciocínio lógico, do espírito inquisitivo e da capacidade de argumentar coerentemente. Portanto, daqui resultou uma oportunidade de criar uma atividade que possa ser prontamente usada por professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Essa atividade foi elaborada com base na metodologia Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP), metodologia que estimula o raciocínio lógico e leva a uma aprendizagem mais significativa dos conteúdos.

Palavras-chave: Frações Equivalentes. Adição e Subtração de Frações. Aprendizagem Baseada em Problemas. Raciocínio Lógico.

**Tânia Maria Nunes
Gonçalves**

Universidade Federal de Catalão
Catalão, GO — Brasil

0000-0002-2309-7648

✉ t.m.n.goncalves@ufcat.edu.br

Thaís Maria Ferreira

Secretaria de Estado de Educação de
Minas Gerais

Patrocínio, MG — Brasil

0009-0009-6129-0957

✉ thaís.ferreira@educacao.mg.gov.br

Recebido em: 27/09/2023

Aceito em: 30/10/2023

Publicado em: 15/12/2023

Didactic activity on addition and subtraction of fractions based on the Problem-Based Learning Methodology

Abstract: In this article, a theoretical study concerning the difficulty in learning the topic of addition and subtraction of fractions was carried out. To achieve this, a review of Brazilian literature was executed. This review revealed the nonexistence of didactic activities regarding simultaneously the teaching of addition (subtraction) of fractions and the development of logical thinking, curiosity and the capacity to argue coherently. Henceforth, from this resulted an opportunity to produce a new activity, that could be promptly used by teachers of elementary school. To create this activity, a methodology which stimulates logical thinking and generates meaningful learning of contents was used, Problem-Based Learning (PBL).

Keywords: Equivalent Fractions. Addition and Subtraction of Fractions. Problem-Based Learning. Logical Thinking.

Actividad didáctica sobre la adición y sustracción de fracciones basada en la metodología de Aprendizaje Basado en Problemas

Resumen: En este artículo, se llevó a cabo un estudio teórico sobre la dificultad en aprender el tema de la adición y sustracción de fracciones. Para ello, se realizó una revisión de la literatura brasileña, en la cual se constató la inexistencia de actividades didácticas que aborden simultáneamente la enseñanza de la adición (sustracción) de fracciones y el desarrollo del razonamiento lógico, el espíritu inquisitivo y la capacidad de argumentar coherentemente. Por lo tanto, surgió la oportunidad de crear una actividad que pueda ser utilizada de inmediato por los profesores de los primeros años de la Educación Primaria. Esta actividad fue elaborada con base en la metodología de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), una metodología que estimula el razonamiento lógico y conduce a un aprendizaje más significativo de los contenidos.

Palabras clave: Fracciones Equivalentes. Adición y Sustracción de Fracciones. Aprendizaje Basado en Problemas. Razonamiento Lógico.

1 Introdução

Como professoras, tanto no Ensino Médio como no Ensino Superior, percebemos que, muitas vezes, nossos estudantes não sabem corretamente como efetuar operações com frações. Esse conteúdo é abordado, pela primeira vez, no 5º ou no 6º ano do Ensino Fundamental, dependendo da região brasileira. Em um levantamento feito junto de 20 professores que lecionam nos anos iniciais do Ensino Fundamental no estado de Minas Gerais, verificamos que, segundo os participantes, o tópico de frações é o conteúdo da Matemática que os estudantes têm mais dificuldade em aprender (Ferreira, 2023, no prelo).

Um excelente estudo realizado na segunda metade da década de 1970, confirma essa dificuldade (Kerslake, 1986). Nesse, estudantes entre os 11 e 15 anos eram questionados sobre diversos tópicos, entre outros, a adição de frações. Menos de 50% dos alunos foram capazes de determinar $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ e, desse conjunto, alguns foram questionados sobre o motivo do uso de 12 como denominador comum: nenhum soube explicar. Vários participantes mencionaram que lhes foi ensinado a adição de frações, mas que não receberam explicação sobre o motivo pelo qual o método ensinado funciona (Kerslake, 1986).

Obviamente, já passaram mais de quarenta anos desde que essa pesquisa foi realizada e o contexto não é mais o mesmo, mas ainda encontramos muitos estudantes no Ensino Fundamental, Médio e Superior que não sabem somar ou subtrair frações. Pesquisas mais recentes, efetuadas por Matioli (2014), Miranda (2007), Oliveira (2017) e Santos (2019), entre outros, mostram que mais de 50% dos participantes (todos estudantes do Ensino Fundamental) não são capazes de adicionar ou subtrair corretamente duas frações.

Para entender a dificuldade que os discentes enfrentam ao aprender, atualmente, como realizar efetivamente a adição e subtração de frações, conduzimos uma pesquisa bibliográfica sobre o tema, com o intuito de descobrir como esse tópico pode ter sido abordado em sala de aula.

Inicialmente, consultamos dezesseis livros didáticos, precisamente, as seções que tratavam de frações. Dessa consulta, observamos, como era de se esperar, que a adição e subtração de frações são efetuadas mediante o uso de frações equivalentes. Contudo, apenas 25% desses livros justificam o uso de frações equivalentes para efetuar a soma ou

diferença de frações com denominadores diferentes. Será esse um motivo pelos quais existe tanta dificuldade com a adição e subtração de frações?

No ambiente escolar, os livros didáticos ainda são considerados centrais no trabalho do professor (O’Keeffe e White¹ *apud* Litoldo, Almeida e Ribeiro, 2018). Contudo, apesar da importância dos livros didáticos, pesquisas mostram que o fator que mais influencia o desempenho acadêmico dos estudantes é o conhecimento demonstrado pelo professor (Hill, Rowan e Ball²; Nye, Konstantopoulos e Hedges³ *apud* Litoldo, Almeida e Ribeiro, 2018).

Em um estudo realizado por Litoldo e Ribeiro (2017), ocorreu uma discussão interessante quando foi pedido a um dos professores participantes que resolvesse a subtração $\frac{6}{7} - \frac{2}{5}$ e explicasse como fez para chegar ao resultado. Durante a discussão, o professor

reconhece que saber a regra não é suficiente se pretendemos que os alunos entendam o que fazem, referindo também ao fato de que ele próprio não entende como poderia fazê-lo sem usar o mínimo múltiplo comum [MMC]. A discussão em torno da representação geométrica levou Roberto a se conscientizar, e verbalizar suas dificuldades em justificar os porquês (algebricamente e geometricamente) — justificção essa que se baseia em um conhecimento que permite que o professor possibilite abordar os diferentes conteúdos e temas sem um foco nas fórmulas — com e para uma efetiva compreensão. (Litoldo e Ribeiro, 2017, p. 7)

Desse excerto, podemos verificar que até mesmo o professor tem dificuldade em explicar por que usa o mínimo múltiplo comum para subtrair frações. Será que a dificuldade com a adição e subtração de frações decorre de uma possível falta de compreensão sobre o procedimento?

Portanto, com base nas dificuldades apresentadas pelos estudantes e professores, relativamente à adição e subtração de frações, nas atividades presentes nos livros didáticos e na importância do desenvolvimento do raciocínio lógico — competência específica da matemática na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), pensamos que

¹ O’KEEFFE, Lisa; WHITE, Bruce. A snapshot of the role of the textbook in English secondary mathematics classrooms. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, v. 18, n. 3, p. 318-332, 2017.

² HILL, Heather C.; ROWAN, Brian; BALL, Deborah Loewenberg. Effects of teachers’ mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal*, v. 42, n. 2, p. 371-406, 2005.

³ NYE, Barbara; KONSTANTOPOULOS, Spyros; HEDGES, Larry V. How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis*, v. 26, n. 3, p. 237-257, 2004.

seria útil elaborar uma atividade que pudesse ser usada em sala de aula pelos professores do Ensino Fundamental e que permitisse aos estudantes deduzir o algoritmo por trás da adição e subtração de frações.

Baseadas em uma revisão sistemática da bibliografia sobre a eficácia da metodologia ABP, efetuada por Merritt *et al.* (2017), optamos por usar a ABP para a elaboração dessa atividade. Segundo Merritt *et al.* (2017), a ABP é uma metodologia de ensino eficaz: melhora o rendimento acadêmico dos estudantes do Ensino Fundamental, a retenção de conhecimento, o desenvolvimento conceitual e atitudes.

Antes de mostrar a atividade didática desenvolvida, detalhamos, na seção 2, como o tópico da adição e subtração de frações é abordado nos livros didáticos. Ainda na seção 2, é realizada uma revisão bibliográfica sobre o ensino da adição de frações com base na metodologia ABP. Na seção 3, apresentamos essa metodologia e seu funcionamento. Na seção 4, descrevemos a atividade didática, como deve ser implementada em sala de aula e o que se espera alcançar com ela. Por fim, encerramos este trabalho com considerações finais.

2 Pesquisas documental e bibliográfica

Tal como foi mencionado na introdução, nesta seção, detalharemos a forma como a adição e subtração de frações é abordada nos livros didáticos. Em seguida apresentaremos algumas contribuições, com o propósito de melhorar a aprendizagem desse tópico. Encerramos esta seção, mostrando que não encontramos nenhuma atividade didática que leve à dedução do algoritmo empregue para efetuar a soma e subtração de frações.

Existem muitos livros didáticos que abordam a adição e subtração de frações. Gostaríamos, na realidade, de ter examinado a totalidade dos livros didáticos que tratam desse conteúdo e que são usados atualmente por professores do Ensino Fundamental. Contudo, investigamos apenas aqueles que tínhamos em posse e os que conseguimos emprestados de colegas e escolas — um total de dezesseis livros didáticos. Dentre esses, dez são recomendados pelo Programa Nacional do Livro e Material Didático (PNLD), representando 62,5% dos livros.

Assim, os livros didáticos consultados foram: *Jornadas: Novos Caminhos: Matemática: 6º ano*, editado por Andrade (2022); *Matemática Bianchini: 6º ano: manual do professor de Bianchini* (2022); *Teláris Essencial: Matemática: 6º ano*, de Dante e

Viana (2022); *Araribá Conecta Matemática: 6º ano*, Manual do Professor, e *Buriti Mais Matemática: Manual do Professor, 5º ano*, editados por Gay (2021, 2022); *Matemática e Realidade, 6º ano*, de Iezzi, Dolce e Machado (2022); *Eu Gosto: Matemática, 5º ano*, de Munhoz, Nazareth e Toledo (2021); *Matemática Essencial, 6º ano*, de Pataro (2018); *Da escola para o mundo: Matemática, 5º ano*, de Pessota (2021); *Nosso livro de Matemática, 5º ano*, de Pires (2014); *Pitangá mais Matemática: manual de práticas e acompanhamento da aprendizagem: digital*, de Ribeiro e Pêsoa (2021); *Trilhas da Matemática, 6º ano*, de Sampaio (2018); *AR: aprender e relacionar: Matemática, 5º ano*, Manual do Professor, de Silveira (2017); *Desafios da Matemática com Ênio Silveira, 6º ano*, Manual do Professor, de Silveira (2022); *SuperAÇÃO! Matemática, 6º ano*, Manual do Professor, de Teixeira (2022); *Mais saber: atividades: Matemática, 6º ano*, Manual do Professor, organizado por Youssef (2022).

Pesquisando o tópico de adição e subtração de frações nos livros didáticos, verificamos que existem similaridades e diferenças relativas a esse tópico. Todos os livros didáticos consultados mencionam o uso de frações equivalentes para realizar a adição e subtração de frações, à exceção dos livros de Munhoz, Nazareth e Toledo (2021), Pessota (2021) e Pires (2014): Munhoz, Nazareth e Toledo (2021) abordam a adição e subtração de frações com o uso de material concreto, sem qualquer referência a frações equivalentes; Pessota (2021) não fala no uso de frações equivalentes para a soma e diferença entre frações, mas menciona o uso dessas no manual do professor; Pires (2014) apresenta exercícios sobre a diferença e soma de frações com denominadores iguais.

Dentro desse conjunto de livros didáticos que usam as frações equivalentes para determinar a adição e subtração de frações, existem algumas diferenças. Nos livros didáticos de Gay (2021) e, de Ribeiro e Pêsoa (2021), é mencionado o uso de frações equivalentes para a adição e subtração de frações com denominadores diferentes, mas não é dito como as frações equivalentes foram escolhidas.

Nos livros de Bianchini (2022), Silveira (2022) e Teixeira (2022), a adição e subtração de frações com denominadores diferentes é feita recorrendo a frações equivalentes, mas a escolha não é explicada na seção “Adição e Subtração de Frações”: essa é feita na seção “Comparação de Frações”. Na seção “Comparação de Frações”, mais precisamente, na parte referente a denominadores diferentes, explica-se que, para comparar essas frações, é necessário usar frações equivalentes, obtidas a partir de um múltiplo comum a todos os denominadores. Nos livros de Silveira (2022) e Teixeira

(2022), são utilizados os mínimos múltiplos comuns, mas isso não é mencionado. O livro de Bianchini (2022) vai além: mostra o uso de listagens de frações equivalentes com a escolha das que têm o menor denominador comum e menciona o uso do mínimo múltiplo comum entre os denominadores.

Nos livros didáticos de Iezzi, Dolce e Machado (2022), e Sampaio (2018), a explicação é idêntica à dos livros de Silveira (2022) e Teixeira (2022), com a diferença de que nos primeiros a explicação encontra-se na própria seção “Adição e Subtração de Frações”.

No livro didático do 6º ano de matemática da coleção *Mais Saber* de Youssef (2022), ao contrário dos livros didáticos de Iezzi, Dolce e Machado (2022), e Sampaio (2018), é mencionado, de forma explícita, o uso do menor múltiplo comum para a determinação de frações equivalentes. Contudo, o tópico de frações equivalentes é abordado após a adição e subtração de frações: o motivo da inversão da ordem de apresentação desses tópicos talvez seja devido ao fato de as frações equivalentes terem sido introduzidas no livro do 5º ano da mesma coleção, *Mais Saber* (Youssef, 2021).

Para determinar a diferença e soma de frações com denominadores diferentes, nos livros didáticos de Andrade (2022), Dante e Viana (2022), Gay (2022), Pataro (2018) e Silveira (2017) são listadas frações equivalentes e escolhem-se, para a adição ou subtração, aquelas com o menor denominador comum. No entanto, apenas Dante e Viana (2022) mencionam explicitamente essa escolha; os outros deixam a parte do “menor” subentendida. Nos livros de Andrade (2022) e Pataro (2018), além de listar as frações equivalentes, também é sugerido o uso de múltiplo comum para os denominadores, obtido pelo produto entre todos os denominadores: os autores deixam claro que os resultados da adição e subtração podem ser posteriormente simplificados.

Por fim, os livros didáticos de Bianchini (2022), Iezzi, Dolce e Machado (2022), Sampaio (2018) e Silveira (2022) destacam algo interessante que nenhum dos outros livros didáticos menciona: para a adição ou subtração de duas frações ser efetuada, é necessário que o inteiro, nas duas frações, esteja dividido em uma quantidade de partes iguais. Esse é o motivo pelo qual precisamos de frações equivalentes para determinar a soma e diferença entre frações de denominadores diferentes. Explicar todos esses detalhes é sempre benéfico, pois pode não ser óbvio para todos os estudantes.

De modo geral, os livros didáticos consultados repassam as informações

necessárias e pertinentes ao ensino do tópico adição e subtração de frações. Então, por que os estudantes têm tantas dificuldades com a diferença e soma de frações? Existem vários estudos que tentam contribuir para uma melhoria do desempenho dos estudantes. Muitas pesquisas apresentam jogos voltados à consolidação do processo de adição e subtração de frações, tais como: “Somando Frações” de Luz *et al.* (2019); “Bingo das Frações” de Cordeiro, Guimarães e Nunes (2017); e “Jogo da Corrida Fracionária” de Gonçalves (2014).

Outros estudos incentivam o uso de material concreto tanto para a introdução do conteúdo de frações como para efetuar as operações de adição e subtração de frações: a “Folha de Papel”, sugerida por Schastai e Silva (2012); “Disco de Frações” recomendado por Neis (2019) e Parnoff *et al.* (2016); “Kit Fracionário” sugerido por Costa e Menino (2016); a “Régua de Carpinteiro” recomendado por Paulino e Pereira (2021); entre outros. De todas as atividades com as quais nos deparamos, nenhuma estava direcionada ao desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de argumentação de forma coerente e para estimular a curiosidade — competência específica da matemática na BNCC.

Dada a importância que essa competência tem na BNCC e considerando as dificuldades existentes com a adição e subtração de frações, pensamos que seria interessante elaborar uma atividade didática que contemplasse esses dois aspectos. Antes de proceder, verificamos no *Google Acadêmico* a existência de atividades didáticas voltadas para a adição e subtração de frações baseadas na metodologia ABP. Ao realizar a busca com os termos “adição”, “frações equivalentes” e “Aprendizagem Baseada em Problemas”, encontramos dezessete referências. No entanto, ao realizar uma triagem, constatamos que nenhuma delas apresentava atividades didáticas com base na ABP relacionadas à soma e diferença entre frações. Sendo assim, prosseguimos para a fase de elaboração. Mas, antes de apresentarmos a atividade, vejamos que modelo de ABP foi utilizado para elaborá-la.

3 Método de ensino: Aprendizagem Baseada em Problemas

Existem vários modelos de ABP, variando consoante o grupo ao qual o método é aplicado. Dado que queremos usar esse método para ensinar o tópico de adição e subtração de frações, conteúdo que faz parte do currículo do 5º ou 6º ano do Ensino Fundamental, decidimos aplicar o modelo de ABP relacionado ao desenho curricular. Considerando a maturidade dos estudantes do 5º ou 6º ano, esse tipo de modelo é mais

apropriado: os problemas são mais estruturados e o professor pode direcionar o pensamento dos discentes, de modo a manter o processo indagativo e propiciar uma aprendizagem significativa. Em um estudo com alunos do 4º ano do Ensino Fundamental, realizado por Drake e Long (2009), o referido modelo mostrou-se promissor e, por esse motivo, resolvemos utilizá-lo para elaborar a atividade introdutória sobre a adição e subtração de frações.

O modelo de ABP com desenho curricular envolve as seguintes etapas:

- a) inicialmente, o problema é apresentado e as tarefas são distribuídas;
- b) em seguida, são identificados os conhecimentos dos estudantes, as informações que eles necessitam e a forma de obtê-las;
- c) nesta etapa, os discentes analisam as suas opções e decidem como proceder;
- d) na última etapa, os estudantes discutem sobre o que descobriram e como isso pode ser usado em outros contextos (Drake e Long, 2009).

Destarte, com base no modelo de desenho curricular apresentado na pesquisa de Drake e Long (2009), elaboramos uma atividade didática, apresentada na seção 4, que proporciona um cenário propício para o desenvolvimento do raciocínio lógico, do espírito inquisitivo e da capacidade de argumentação dos estudantes, competência específica da matemática (competência 2), presente na BNCC. Além disso, pensamos que esse modelo possa, também, levar a uma aprendizagem significativa do conteúdo sobre adição e subtração de frações.

4 Atividade voltada à introdução do tópico adição e subtração de frações

O intuito da presente atividade é disponibilizar uma forma de ensinar o tópico da adição e subtração de frações, visando uma aprendizagem significativa. Assim, em vez de já iniciar esse tópico indicando como essas operações são efetuadas, o docente apresenta uma atividade guiada que leva à dedução do procedimento. Desse modo, quando o procedimento é formalizado, os estudantes já não se assustam, pois participaram da sua construção. Ademais, a atividade oferece uma oportunidade para desenvolver a competência 2 da Matemática.

Inicia-se a atividade informando à turma que será realizado um trabalho em equipe, no qual eles descobrirão como efetuar a adição e subtração de frações. Em seguida, divide-se a turma em pequenas equipes que receberão um envelope numerado

com três círculos de Etileno Vinil Acetato (conhecido como EVA), cada um de sua cor. Esses círculos de EVA são todos do mesmo tamanho, sendo que dois deles estão divididos em m e n setores iguais (m e n podem ser iguais) e o terceiro possui um número de setores idênticos igual ao mínimo múltiplo comum entre m e n — representado por $mmc(m, n)$. Para facilitar a logística da atividade (mais propriamente os enunciados), todos os envelopes devem conter três círculos: vermelho, azul e amarelo, onde, por exemplo, o círculo vermelho tem m setores iguais, o círculo azul tem n setores iguais e o círculo amarelo tem $mmc(m, n)$ setores iguais.

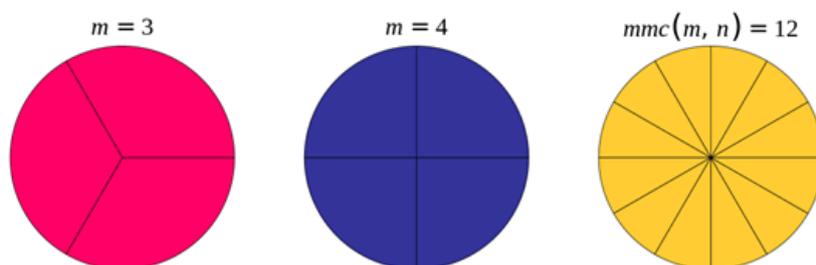


Figura 1: Representação dos círculos de EVA (autoria própria)

Na Figura 1 ilustramos um conjunto possível de três círculos, em que $m = 3$, $n = 4$ e $mmc(3,4) = 12$. Além do envelope contendo os círculos, será fornecida uma primeira lista de exercícios. Ao todo, serão entregues três listas de exercícios, intercaladas com momentos para discutir os resultados da investigação e resumir as descobertas feitas nas listas.

Após a entrega do material, dá-se início à segunda etapa da atividade: o professor dialoga com a turma, informando que, por meio dos conhecimentos adquiridos sobre frações equivalentes e múltiplos, juntamente com a resolução das listas, eles serão capazes de deduzir o procedimento para a realização da adição e subtração de frações. Ressaltamos que convém trabalhar o tópico de frações equivalentes com material concreto antes de iniciar esta atividade. As frações equivalentes podem ser trabalhadas com discos de frações, régua de frações, régua de carpinteiro, material Cuisenaire, entre outros. Destacamos que existe muita literatura sobre esse tópico.

Como já foi dito anteriormente, o trabalho de investigação desenvolvido nesta atividade tem que ser intercalado com momentos de reflexão, discussão e recapitulação das descobertas feitas. Esses momentos são importantes, pois permitem a consolidação das descobertas e possibilitam o direcionamento do pensamento para a próxima etapa de investigação. Apresentaremos as listas de exercícios investigativos.

Lista 1

Questão 1. Olhando para o círculo vermelho, escrevam a fração correspondente a um setor desse círculo. *Resposta:* _____

Questão 2. Observando o círculo azul, escrevam a fração correspondente a um setor azul. *Resposta:* _____

Questão 3. Com o auxílio do círculo amarelo, descubram a fração correspondente à união de um setor vermelho com um setor azul. *Resposta:* _____

Troquem o seu envelope de círculos com o de outra equipe e respondam de novo às Questões 1, 2 e 3. Façam isso até terem esgotado todos os envelopes de círculos. Registrem todos os resultados na Tabela 1.

Tabela 1

Coluna 1: Envelope	Coluna 2: Fração correspondente a um setor vermelho	Coluna 3: Fração correspondente a um setor azul	Coluna 4: Fração correspondente à união de um setor vermelho com um setor azul
1			
:			

Fonte: Autoria própria

Questão 4. Com o uso das representações geométricas das frações, podemos determinar a adição de frações? *Resposta:* _____

Questão 5. Observando os valores das frações na Tabela 1, existe alguma tripla de círculos em que a soma das frações pareça ser simples? Explique o porquê. *Resposta:* _____

Questão 6. Quanto à soma das frações que não têm denominadores iguais, o que acham que deve ser feito? *Resposta:* _____

Neste primeiro momento de reflexão, o professor anota na lousa os achados dos estudantes. Obviamente, à medida que o docente registra os resultados, se houver algum erro, o professor deve pedir a uma equipe para ilustrar como fizeram para chegar ao resultado. Talvez nesse processo de explicar, eles próprios percebam os erros cometidos. Suponhamos que a Tabela 1 registrada pelo professor seja como aquela que apresentamos na página seguinte.

Com a Tabela 1 registrada na lousa, o professor pergunta aos estudantes o que responderam nas Questões 4, 5 e 6. O intervalo entre a resolução das listas é um momento no qual ocorre discussão dos resultados obtidos pelos alunos; o papel do docente é mediar e direcionar a discussão.

A Questão 6 é a questão mais difícil da Lista 1. Talvez o professor aqui precise dar uma dica, por exemplo: “Se para somar frações com denominadores iguais, basta adicionar os numeradores e manter os denominadores, o que acham que devem fazer com

as frações que têm denominadores diferentes para que possam ser adicionadas?” O professor deve dar dicas até que os estudantes descubram: o docente não deve privar os alunos da satisfação de descobrir algo, pois trata-se de um sentimento revigorante que nunca vão esquecer.

Tabela 1

Coluna 1: Envelope	Coluna 2: Fração correspondente a um setor vermelho	Coluna 3: Fração correspondente a um setor azul	Coluna 4: Fração correspondente à união de um setor vermelho com um setor azul
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{11}{18}$
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$
5	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{11}{15}$
6	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$
7	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$
8	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$
9	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{10}$
10	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{20}$

Fonte: Autoria própria

Após todos constatarem que é viável realizar a adição de frações por meio de representações geométricas, e compreenderem que, para frações com denominadores iguais, basta somar os numeradores mantendo os denominadores, e para frações com denominadores diferentes é necessário convertê-las em frações equivalentes com denominadores comuns, eles estão prontos para receber a segunda lista de exercícios investigativos. As Listas 2 e 3 que se seguem são baseadas nos conjuntos de círculos que consideramos, conforme pode ser visto na versão preenchida da Tabela 1. Portanto, se o professor optar por usar círculos com divisões diferentes, deverá adequar as questões das Listas 2 e 3.

Lista 2

Questão 1. Dado que, para somar frações, essas precisam ter um denominador comum, escrevam nos respectivos locais da Tabela 2, as 10 menores frações equivalentes não nulas das frações presentes nas colunas 2 e 3 da Tabela 1. Façam isso, apenas para as triplas nas quais os denominadores das frações das colunas 2 e 3 não sejam iguais.

Questão 2. Circulem as frações equivalentes da coluna 2 e da coluna 3, na Tabela 2, que possuam os menores denominadores comuns.

Tabela 2

Coluna 1: Envelope	Coluna 2: Frações equivalentes às frações da coluna 2 da Tabela 1	Coluna 3: Frações equivalentes às frações da coluna 3 da Tabela 1
1		
:		

Fonte: Autoria própria

Questão 3. Com base no que descobriram até agora, calculem as somas das frações que seguem. Não escrevam apenas o resultado final.

$1/3 + 1/4 =$

$1/4 + 1/6 =$

$1/6 + 4/9 =$

$1/2 + 1/3 =$

$1/3 + 2/5 =$

$1/7 + 3/7 =$

$1/9 + 4/9 =$

$3/4 + 1/8 =$

$2/5 + 1/10 =$

$1/4 + 1/5 =$

Questão 4. Para efetuar as adições da Questão 3, qual foi o critério que usaram para escolher as frações equivalentes e por quê? *Resposta:* _____

Questão 5. Poderiam ter escolhido outras frações equivalentes para fazer as somas referidas na Questão 4? Justifique. *Resposta:* _____

Questão 6. Escrevam os 10 primeiros múltiplos não nulos de cada número indicado na Tabela 3. Note que os números da Tabela 3 coincidem com os denominadores das colunas 2 e 3 da versão preenchida da Tabela 1.

Tabela 3

Número	Múltiplos
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Fonte: Autoria própria

Questão 7. Inspecionando a Tabela 3, determine os menores múltiplos comuns entre os pares de números na Tabela 4.

Questão 8. Os mínimos múltiplos comuns (*mmc*) da Tabela 4, coincidem com os menores denominadores comuns das frações equivalentes da Tabela 2? *Resposta:* _____

Questão 9. Preencham a Tabela 5.

Questão 10. Os valores da última coluna da Tabela 5 coincidem com os mínimos múltiplos comuns da Tabela 4? *Resposta:* _____

Questão 11. Olhando para a Tabela 5, quando m e n não têm fatores comuns, como podemos dizer que é obtido o mínimo múltiplo comum? *Resposta:* _____

Tabela 4

Par de números	Menor múltiplo comum (ou mínimo múltiplo comum)
3 e 4	
4 e 6	
6 e 9	
2 e 3	
3 e 5	
4 e 8	
5 e 10	
4 e 5	

Fonte: Autoria própria

Tabela 5

m	n	Fatores primos de m	Fatores primos de n	Fatores primos comuns a m e n	Fatores primos que só aparecem em m	Fatores primos que só aparecem em n	Produto dos fatores das 3 colunas anteriores
3	4						
4	6						
6	9						
2	3						
3	5						
4	8						
10	5						
4	5						

Fonte: Autoria própria

Questão 12. Inspeccionando a Tabela 5, quando m ou n é um múltiplo de n ou m , respectivamente, como podemos dizer que é obtido o mínimo múltiplo comum? *Resposta:* _____

Questão 13. Quando m e n têm fatores comuns, mas o maior não é um múltiplo do menor, como podemos dizer que é obtido o mínimo múltiplo comum? *Resposta:* _____

Com a Lista 2, pretende-se que os estudantes vejam que há diversas formas de obter as frações equivalentes às frações dadas na soma – existe uma relação entre elas. As questões mais difíceis desta lista são as 12 e 13.

Vejamos a Tabela 5 preenchida.

Tabela 5

m	n	Fatores primos de m	Fatores primos de n	Fatores primos comuns a m e n	Fatores primos que só aparecem em m	Fatores primos que só aparecem em n	Produto dos fatores das 3 colunas anteriores
3	4	3	2, 2	Não há	3	2, 2	$3 \times 2 \times 2 = 12$
4	6	2, 2	2, 3	2	2	3	$2 \times 2 \times 3 = 12$
6	9	2,3	3, 3	3	2	3	$3 \times 2 \times 3 = 18$
2	3	2	3	Não há	2	3	$2 \times 3 = 6$
3	5	3	5	Não há	3	5	$3 \times 5 = 15$
4	8	2, 2	2, 2, 2	2, 2	Não há	2	$2 \times 2 \times 2 = 8$
10	5	2,5	5	5	2	Não há	$5 \times 2 = 10$
4	5	2, 2	5	Não há	2, 2	5	$2 \times 2 \times 5 = 20$

Fonte: Autoria própria

No que diz respeito à Questão 12, caso os estudantes não tenham percebido que, quando m ou n é um múltiplo de n ou m , respectivamente, o mínimo múltiplo comum é m ou n , o professor deve orientá-los a observar as linhas com $m = 4$ e $n = 8$, e $m = 10$ e $n = 5$. Quanto à Questão 13, o professor pode sugerir que os estudantes analisem as linhas com $m = 4$ e $n = 6$, e $m = 6$ e $n = 9$ e leiam os títulos das quatro últimas colunas da Tabela 5. Mesmo com essas dicas, os alunos podem ainda não ter sido capazes de determinar os mínimos múltiplos comuns. O papel do professor é estimular o raciocínio dos estudantes, evitando fornecer as respostas prontas.

Neste segundo momento de reflexão, o professor deve registrar os dados das Tabelas 2 a 5 na lousa, de modo a permitir uma discussão coletiva e averiguar se os estudantes encontraram as respostas corretas. Assim como se procedeu no primeiro momento de reflexão, se houver algum dado errado nas tabelas, deve-se pedir a uma equipe que explique como chegaram até aquele resultado. Caso, mesmo após a explicação, o erro persista, o professor deve fornecer dicas que orientem os discentes a descobrir o que foi feito de errado. Uma vez que foram discutidos todos resultados, os alunos podem receber a Lista 3.

Lista 3

Para adicionar frações, começamos por verificar se os denominadores são iguais. Se sim, basta somar os numeradores e manter os denominadores. Se os denominadores são diferentes, devemos procurar frações equivalentes com denominadores iguais para que a adição seja possível. Para isso, descobrimos que existem duas formas de proceder: listam-se as frações equivalentes e procuram-se entre elas as frações equivalentes com denominadores comuns

(normalmente escolhem-se aquelas com menor denominador comum); ou determinamos o mínimo múltiplo comum entre os denominadores das frações e esse será o denominador das frações equivalentes que necessitamos para efetuar a soma das frações. Ainda existe uma outra forma de proceder, a qual iremos descobrir.

Questão 1. Preencham a Tabela 6.

Tabela 6

a/b	c/d	bd	Fração equivalente a a/b com denominador igual a bd	Fração equivalente a c/d com denominador igual a bd	Soma das duas últimas colunas
1/3	1/4				
1/4	1/6				
1/6	4/9				
1/2	1/3				
1/3	2/5				
3/4	1/8				
1/10	2/5				
1/4	1/5				

Fonte: Autoria própria

Questão 2. Baseado no que foi feito na Tabela 6, como podemos fazer a soma de duas frações com denominadores diferentes? *Resposta:* _____

Questão 3. Façam a adição de $5/18$ com $5/12$, usando listagens de frações equivalentes. *Resposta:* _____

Questão 4. Efetuem a mesma adição que na Questão 3, mas agora usando o mínimo múltiplo comum para determinar o denominador das frações equivalentes. *Resposta:* _____

Questão 5. Efetuem a mesma adição que na Questão 3, mas agora usando a última forma de proceder que viram – conhecida como *produto cruzado*. *Resposta:* _____

Questão 6. Calcule $3/5 + 2/7$, usando os três métodos. *Resposta:* _____

Questão 7. Calcule $3/5 + 3/10$, usando os três métodos. *Resposta:* _____

Questão 8. Os processos de adição de frações que vimos nas Listas 1, 2 e 3, podem ser usados para a subtração de frações? Por quê? *Resposta:* _____

As Questões 2 e 8 são as mais difíceis da Lista 3. No que se refere à Questão 2, se os estudantes não foram capazes de explicar o terceiro processo de adição de frações, o professor deve perguntar como fizeram para achar as frações equivalentes de $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$. Quanto à Questão 8, o professor pode sugerir que eles tentem efetuar a subtração $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ usando o processo da listagem de frações equivalentes. Tal como nos momentos de reflexão anteriores, o docente deve permitir que os alunos pensem, nunca dando a resposta.

É provável que esta atividade necessite de mais de uma aula para ser concluída. O

ponto crucial é que os estudantes tenham descoberto, por conta própria, todos os processos utilizados para realizar a adição e subtração de frações.

5 Considerações finais

A dificuldade com o tópico de adição e subtração de frações está mais do que comprovada pelos diversos estudos que se encontram na literatura e pela experiência que temos na prática da docência. Os motivos por trás dessa dificuldade são vários. Trata-se de um tópico que requer um pouco mais de esforço por parte dos estudantes para compreender e, por conseguinte, mais esforço dos professores para ensinar — esforço que, muitas vezes, é impraticável, devido à carga horária excessiva.

Hoje, existem muitas distrações: os estudantes levam seus celulares para as aulas e, ao invés de prestar atenção no que o professor fala, envolvem-se com as redes sociais ou outros atrativos. Atualmente, os professores não contam com a mesma autoridade que tinham no passado, necessitando de uma abordagem mais flexível para lidar com os alunos em sala de aula. Além disso, o ambiente familiar desempenha um papel crucial na motivação dos estudantes. Embora existam diversos fatores envolvidos, como professores, podemos apenas contribuir para resolver os desafios do ensino.

Visto que os livros didáticos que consultamos explicam bem, de modo geral, o tópico de adição e subtração de frações, resolvemos elaborar uma nova atividade, baseada em uma metodologia que é pouco utilizada no ensino básico, a ABP. O intuito dessa atividade não foi apenas providenciar uma nova forma de ensinar o tópico de adição e subtração de frações, mas também possibilitar o desenvolvimento do raciocínio, competência específica da matemática presente na BNCC. Em trabalhos futuros, pretendemos aplicar essa atividade no 5º ano do Ensino Fundamental, com o objetivo de determinar se ela realmente produz uma aprendizagem significativa.

Na literatura acadêmica, percebe-se que não é recomendado o ensino do mínimo múltiplo comum no 5º ou 6º ano do Ensino Fundamental, conforme sugerimos na atividade desenvolvida neste artigo, na verdade, é aconselhado que seja ensinado mais tarde. Contudo, já vimos, em algumas publicações acadêmicas e na prática da docência, que os estudantes, uma vez que aprendem um modo de calcular algo, não estão abertos a aprender uma nova forma de calcular.

Portanto, na nossa opinião, é prejudicial adiar o ensino do processo de adição e subtração de frações com o uso do mínimo múltiplo comum. Todos os processos de

adição e subtração de frações devem ser ensinados no mesmo ano letivo.

No Ensino Superior, é comum surgirem somas de funções racionais (frações algébricas) em problemas. Muitas vezes, os estudantes não são capazes de efetuar essas somas por não terem aprendido significativamente o processo de adição e subtração de frações, sendo incapazes de abstrair o que aprenderam para o caso de frações algébricas. Ou então, conseguem somar as funções racionais, mas não usaram o mínimo múltiplo comum, obtendo polinômios de grau elevado, que são mais difíceis de fatorar e, por conseguinte, dificultam a simplificação das funções racionais, ou seja, a resolução do problema. Pensamos que não se deve subestimar a capacidade dos discentes (que são crianças), pois temos a função de estimulá-los. Não devemos esquecer que os bebês aprendem a falar do nada!

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer a Élide Alves da Silva pelas suas contribuições éticas.

Referências

ANDRADE, Thais Marcelle de. (Ed.). *Jornadas: novos caminhos: Matemática*, 6º ano. São Paulo: Saraiva Educação S.A., 2022.

BIANCHINI, Edwaldo. *Matemática Bianchini: 6º ano: Manual do Professor*. 10. ed. São Paulo: Moderna, 2022.

CORDEIRO, Natália Moraes; GUIMARÃES, Jonnathan Felipe Araújo; NUNES, José Edvaldo de Oliveira. [Ensino de frações: o uso de atividades lúdicas como recurso facilitador da aprendizagem](#). In: *Anais do IV Congresso Nacional de Educação*. Campina Grande 2017, p. 1-6.

COSTA, Givaldo da Silva; MENINO, Miguel Rodrigues. [Utilizando materiais concretos na construção do conceito e nas operações com frações](#). In: *Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática*. São Paulo, 2016, p. 1-8.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. *Teláris Essencial: Matemática: 6º ano*. São Paulo: Ática, 2022.

DRAKE, Kay N.; LONG, Deborah. Rebecca's in the Dark: a comparative study of Problem-Based Learning and Direct Instruction/Experiential Learning in two 4th-grade classrooms. *Journal of Elementary Science and Education*, Macomb, v. 21, n. 1, p. 1-16, 2009.

FERREIRA, Thaís Maria. *Dificuldades na aprendizagem de Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: atividades didáticas voltadas à melhoria da aprendizagem e ao desenvolvimento do raciocínio lógico*. 2023 (no prelo). Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Instituto de Matemática e Tecnologia. Universidade Federal de Catalão. Catalão.

GAY, Mara Regina Garcia (Ed.). *Araribá Conecta Matemática*, 6º ano, Manual do Professor. São Paulo: Moderna, 2022.

GAY, Mara Regina Garcia. (Ed.). *Buriti Mais Matemática*, 5º ano. Manual do Professor. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2021.

GONÇALVES, João Batista. *Atividades e jogos envolvendo o conceito de frações*. 2014. 56f. Monografia (Especialização em Matemática) — Instituto de Ciências Exatas. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. *Matemática e Realidade*, 6º ano. 10. ed. São Paulo: Saraiva Educação S.A., 2022.

KERSLAKE, Daphne. *Fractions: children's strategies and errors: a report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Windsor: The NFER-NELSON Publishing Company Ltd, 1986.

LITOLDO, Beatriz Fernanda; ALMEIDA, Marieli Vanessa Rediske de; RIBEIRO, Miguel. *Conhecimento especializado do professor que ensina Matemática: uma análise do livro didático no âmbito das frações*. *Tangram*, Dourados, v. 1, n. 3, p. 3-23, 2018.

LITOLDO, Beatriz Fernanda; RIBEIRO, Miguel. *Conhecimento matemático especializado do professor que ensina Matemática em contexto formativo Lesson Study*. In: Anais do VI Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática. Campinas, 2017, p. 1-10.

LUZ, Bruno Ferreira da; OLIVEIRA, Jenifer Cassandra da Silva; TEDESCO, Murilo Ferulio Gomes; SILVA, Fabiana Gersa Leindeker. *Jogos Matemáticos: contribuições no processo de ensino e aprendizagem de frações*. *Viver IFRS*, Bento Gonçalves, v. 7, n. 7, p. 104-108, 2019.

MATIOLI, Cristiane Elise Reich. *Estratégia para o ensino das frações no sexto ano do Ensino Fundamental*. 2014. 44f. Monografia (Especialização em Educação) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Medianeira.

MERRITT, Joi; LEE, Mi Yeon; RIBEIRO, Peter; KINACH, Barbara M. *Problem-based learning in K-8 Mathematics and Science Education: a literature review*. *Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning*, v. 11, n. 2, 2017.

MIRANDA, Weverton dos Santos. *Erros e obstáculos: os conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental no processo de avaliação*. 2007. 129f. Dissertação (Mestrado de Educação em Ciências e Matemáticas) — Universidade Federal do Pará. Belém.

MUNHOZ, Aida Ferreira da Silva; NAZARETH, Helenalda Resende de Souza; TOLEDO, Marília Barros de Almeida. *Eu Gosto: Matemática*, 5º ano. 2. ed. São Paulo: IBEP, 2021.

NEIS, Vanderlei Silva. *A utilização de materiais concretos no ensino de fração*. 2019. 75f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Instituto de Ciências da Educação. Universidade Federal do Oeste do Pará. Santarém.

OLIVEIRA, Luís Carlos Góis de. *Análise de erros cometidos pelos discentes do sétimo*

ano do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio no estudo dos números racionais na sua forma fracionária. 2017. 98f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal de Sergipe. Itabaiana.

PARNOFF, Letícia Klein; ALVES, Luana Leal; FANTINEL, Patrícia da Conceição; ALVES, Antonio Mauricio Medeiros. *Adição de frações através dos discos fracionários*. In: XII Encontro Nacional De Educação Matemática. São Paulo, 2016, p. 1-10.

PATARO, Patrícia Moren. *Matemática Essencial*, 6º ano. São Paulo: Scipione, 2018.

PAULINO, Sabrina de Sousa; PEREIRA, Ana Carolina Costa. *A régua de carpinteiro (escalas) de Leonard Digges (1520-1559) para o estudo de conceitos matemáticos: possível incorporação na Educação Básica*. *Educação Matemática Debate*, Montes Claros, v. 5, n. 11, p. 1-17, 2021.

PESSOTA, Rodrigo. (Ed.). *Da escola para o mundo: Matemática*, 5º ano. São Paulo: Scipione, 2021.

PIRES, Célia Maria Carolino. *Nosso livro de Matemática*, 5º ano. 2. ed. São Paulo: Zé-Zapt Editora, 2014.

RIBEIRO, Jackson; PESSÔA, Karina. *Pitangüá mais Matemática: manual de práticas e acompanhamento da aprendizagem: digital*. São Paulo: Moderna, 2021.

SAMPAIO, Fausto Arnaud. *Trilhas da Matemática*, 6º ano. São Paulo: Saraiva, 2018.

SANTOS, José Carlos Medeiros dos. *Conceituação, manipulação e aplicação de frações pelo método de Singapura*. 2019. 147f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Instituto de Matemática. Universidade Federal de Alagoas. Maceió.

SCHASTAI, Marta Burda; SILVA, Sani de Carvalho Rutz da. *Caderno pedagógico: as oficinas na formação continuada de professores — uma estratégia a partir do Pró-Letramento Matemática para a construção do conceito de frações*. Ponta Grossa: UTFPR, 2012.

SILVEIRA, Ênio. *AR: aprender e relacionar: Matemática*, 5º ano, Manual do Professor. São Paulo: Moderna, 2017.

SILVEIRA, Ênio. *Desafios da Matemática com Ênio Silveira*, 6º ano, Manual do Professor. São Paulo: Moderna, 2022.

TEIXEIRA, Lilian Aparecida (Ed.). *SuperAÇÃO! Matemática*, 6º ano, Manual do Professor. São Paulo: Moderna, 2022.

YOUSSEF, Antonio Nicolau (Org.). *Mais saber: atividades: Matemática*, 5º ano. São Paulo: Lunik Soluções Educacionais, 2021.

YOUSSEF, Antonio Nicolau (Org.). *Mais saber: atividades: Matemática*, 6º ano, Manual do Professor. São Paulo: Lunik Soluções Educacionais, 2022.