

Conocimiento didáctico del contenido para dar significado a la multiplicación de fracciones. Un estudio de caso en México

Resumen: Este artículo tiene como objetivo describir el conocimiento didáctico del contenido, inmerso en la práctica docente para enseñar la multiplicación de fracciones en educación básica. Se observó y entrevistó a una profesora mexicana que trabajó este contenido con niños de sexto grado de primaria. Para el análisis, se implementaron categorías derivadas de la literatura y subcategorías emergentes de los datos: conocimiento de la enseñanza de la multiplicación de fracciones, conocimiento de las características del aprendizaje de las Matemáticas, y conocimiento de los estándares de aprendizaje de la multiplicación de fracciones. El conocimiento de la profesora se caracteriza por las estrategias didácticas que implementó para favorecer el aprendizaje de este objeto matemático, como la estrategia de descubrimiento e inferencias, así como el uso de tiras de papel y figuras geométricas para manipular y visualizar el algoritmo de la multiplicación de fracciones, y así darle significado como parte-todo y suma reiterada.

Palabras clave: Conocimiento Didáctico. Práctica Docente en Matemáticas. Enseñanza de las Fracciones. Algoritmo de la Multiplicación de Fracciones.

The role of pedagogical content knowledge on giving meaning to the multiplication of fractions. A case study in Mexico

Abstract: This paper aims to describe the pedagogical content knowledge when teaching the multiplication of fractions in elementary education. A sixth-grade teacher was observed and interviewed while working on this topic with students in a Mexican public school. As a part of the analysis, categories were derived from the literature and emerging subcategories from the data were implemented. The resulting categories were: knowledge for teaching fraction multiplication, knowledge of features of learning mathematics, and knowledge of fraction multiplication learning standards. The results show that teacher's pedagogical knowledge is characterized by pedagogical strategies oriented to promote the learning of this mathematical object, the strategies that stood up from the rest are making discoveries and inferences as well as using strips of paper and geometrical figures to manipulate and visualize the multiplication of fractions algorithm. Through these strategies, the teacher gave the meaning of part of a whole and repeated addition to the multiplication of fractions.

Keywords: Pedagogical Knowledge. Mathematics Teacher Practice. Teaching of Fractions. Multiplication of Fractions Algorithm.

Conhecimento pedagógico do conteúdo para dar sentido à multiplicação de frações. Um estudo de caso no México

Resumo: O artigo tem como objetivo descrever o conhecimento pedagógico do conteúdo inserido na prática docente para ensinar a multiplicação de frações na Educação Básica. Foi observada e entrevistada uma professora mexicana trabalhando esse conteúdo com

David Alfonso Páez

Universidad Autónoma de
Aguascalientes

Aguascalientes, México

 0000-0002-4499-4452

 david.paez@edu.uaa.mx

Indira Viridiana Medina

Mendoza

Universidad Autónoma de
Aguascalientes

Aguascalientes, México

 0000-0002-5117-8453

 elt_immendoza@live.com

María Guadalupe

Pérez-Martínez

Universidad Autónoma de
Aguascalientes

Aguascalientes, México

 0000-0003-3655-0090

 maria.perez@edu.uaa.mx

Recibido en: 05/01/2023

Aceptado en: 30/06/2023

Publicado en: 04/07/2023

crianças do 6º ano do Ensino Fundamental. Para a análise, foram implementadas categorias derivadas da literatura e subcategorias emergentes dos dados: conhecimento do ensino da multiplicação de frações, conhecimento das características de aprendizagem de Matemática, e conhecimento dos padrões de aprendizagem para multiplicação de frações. O conhecimento da professora é caracterizado, pelas estratégias que buscam promover a aprendizagem desse objeto matemático, em especial, ela destaca a estratégia de descoberta e inferências, bem como o uso de tiras de papel e figuras geométricas para manipular e visualizar o algoritmo da multiplicação de frações e, com ele, dar-lhe significado como parte-todo e adição repetida.

Palavras-chave: Conhecimento Pedagógico. Prática Docente em Matemática. Ensino de Frações. Algoritmo de Multiplicação de Frações.

1 Introducción¹

La fracción es un contenido clave del currículo matemático que favorece el sentido numérico, así como el pensamiento aritmético y algebraico (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS [NCTM], 2013; RIANASARI y JULIE, 2017). En el contexto mexicano, el currículo oficial estipula que las y los estudiantes de Educación Básica² resuelvan problemas de multiplicación que involucren fracciones (MÉXICO, 2011a, 2011b), con la finalidad de que desarrollen habilidades de razonamiento matemático útiles en su vida académica y cotidiana; en particular, se pretende que el alumnado utilice la fracción como un operador multiplicativo para obtener una parte de un conjunto, ya sea de otra fracción o de un número natural. Para ello, el currículo de educación primaria plantea como objetivo que “[el alumnado] identifique y use el significado de las expresiones ‘ a/b de n ’, ‘ a/b veces n ’ y ‘ $a/b \times n$ ’” (MÉXICO, 2014, p. 194) y que trabaje la multiplicación de la forma $a/b \times b/c$ (MÉXICO, 2014).

A pesar de la importancia de este contenido, es un tema complejo y de difícil comprensión para las y los estudiantes (JOHANNING, 2019), lo que representa un reto para la enseñanza de las Matemáticas (ISKENDEROGU, 2018; SON, KWON y YEONG, 2019). Iskenderoglu (2018) señala que, frecuentemente, el alumnado comete errores al usar las fracciones en la realización de operaciones matemáticas básicas, como la suma, resta, división y multiplicación (ISKENDEROGU, 2018). Esto se debe a que, en ocasiones, las y los estudiantes memorizan las reglas, fórmulas, algoritmos y procedimientos, sin desarrollar una comprensión lógica de estos (MAKHUBELE, 2021);

¹ Este artículo es parte de una tesis de maestría defendida en el Programa de Postgrado en Investigación Educativa de la Universidad Autónoma de Aguascalientes, México, redactada por el segundo autor y supervisada por el primero.

² La Educación Básica en México es obligatoria y está conformada por tres niveles: preescolar (alumnado de 3 a 5 años de edad), primaria (alumnado de 6 a 12 años de edad) y secundaria (alumnado entre 13 y 15 años de edad). La primaria se divide en seis grados escolares, uno por año.

también se debe a la variedad de significados que tiene la fracción — parte-todo, proporción, operador, cociente y medida —, y a la implementación que el alumnado hace de las propiedades de los números naturales en las fracciones y en sus operaciones (RAHAYU y PUTRI, 2017).

Por otra parte, Isiksal y Cakiroglu (2010) y Prediger (2008) señalan que, en el alumnado, prevalece la idea de que la multiplicación de fracciones es solo una suma reiterada y que el producto es mayor que los factores. Uno de los obstáculos conceptuales y epistemológicos radica en considerar, como regla intuitiva, que *el producto es mayor que los factores*.

Las diversas dificultades que enfrentan las y los estudiantes con respecto al tema de fracciones y a la multiplicación de fracciones, hacen necesario que las y los docentes, además de tener un dominio disciplinar, desarrollen un conocimiento didáctico de contenido que les permita, entre otras acciones, seleccionar tareas, actividades, representaciones particulares y ejemplos acordes con el contenido y nivel cognitivo del alumnado, identificar errores y atender dudas, y tener clara la brecha que existe entre lo que sabe el alumnado y lo que necesita aprender (BALL, THAMES y PHELPS, 2008; MIOLA y LIMA, 2020; NCTM, 2013). Como parte de su conocimiento didáctico del contenido, el profesorado debe transformar el contenido en representaciones, de modo que el alumnado lo comprenda (ISIKSAL y CAKIROGLU, 2010; ARTEAGA, BATANERO y GEA, 2017; MEDINA, 2018; PÁEZ, MEDINA y PÉREZ-MARTÍNEZ, 2020).

La importancia del conocimiento didáctico del contenido en la enseñanza de las Matemáticas, de acuerdo con Ball, Thames y Phelps (2008), Carrillo, Escudero y Flores (2014), Sosa, Flores y Carrillo (2016), Shulman (1986), se cifra en que, a partir de éste, se desprenden estrategias de enseñanza, insumos didácticos, explicaciones y representaciones idóneas para impartir el contenido, al tiempo que permite la identificación de las características del alumnado que facilitan o dificultan la comprensión del mismo.

La presente investigación tiene como objetivo describir el conocimiento didáctico de una profesora de educación primaria, durante los procesos de enseñanza y aprendizaje del contenido de multiplicación de números fraccionarios. Este estudio busca contribuir a la investigación sobre las prácticas docentes en el aula, específicamente, pretende mostrar que la enseñanza de la multiplicación de fracciones requiere de profesionales con

habilidades didácticas para transmitir ese conocimiento matemático a los estudiantes (NCTM, 2013). Para ello, es fundamental identificar cuáles son esas habilidades, en términos de conocimiento didáctico, y cómo son puestas en la práctica para asegurar que el alumnado comprenda este contenido matemático.

De igual manera, se busca enfatizar el conocimiento didáctico como objeto relevante para la enseñanza de la multiplicación de fracciones, es decir, indagar cómo el conocimiento didáctico se relaciona con el contenido para favorecer el aprendizaje de las fracciones y, específicamente, el algoritmo de la multiplicación con números fraccionarios (BALL, THAMES y PHELPS, 2008; FLORES, 2011; SON, 2012). Desde esta perspectiva, los hallazgos de este estudio podrían contribuir al fortalecimiento de la formación inicial y continua del profesorado, en el campo de las Matemáticas.

2 Conocimiento didáctico del contenido para enseñar Matemáticas

Para dar cuenta del conocimiento didáctico del profesorado en la enseñanza de las Matemáticas, se han desarrollado diversos modelos teóricos (BALL, THAMES y PHELPS, 2008; CARRILLO *et al.*, 2013; GODINO, 2009). Uno de ellos es el *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (CARRILLO, ESCUDERO y FLORES, 2014), en el cual se afirma que el profesorado posee un conocimiento especial para enseñar Matemáticas, el cual comprende dos dominios amalgamados: el de las Matemáticas y el de la didáctica de esta asignatura (Figura 1).

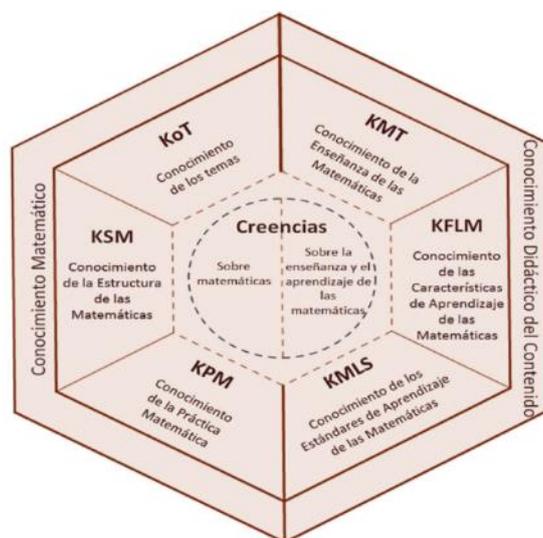


Figura 1: Esquema del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (SOSA, FLORES y CARRILLO, 2016, p. 154)

Tal conocimiento es definido como el “conjunto integrado de saberes de distintas naturalezas [...] y [comprende un dominio de la] Matemática en general y de

conocimientos matemáticos particulares, y [un dominio] de su enseñanza y aprendizaje [es decir, de su didáctica, lo que recibe el nombre de *Conocimiento Didáctico del Contenido*]" (CARRILLO, ESCUDERO y FLORES, 2014, p. 16-19). El primer dominio está representado en la parte izquierda de la Figura 1 y el segundo, en la parte derecha.

El *Conocimiento Didáctico del Contenido*, concepto que es retomado en el presente estudio, es un componente fundamental del profesorado que se dedica a enseñar Matemáticas (CARRILLO *et al.*, 2013; CARRILLO, ESCUDERO y FLORES, 2014; SOSA, FLORES y CARRILLO, 2016) y hace referencia:

A las formas más útiles de representación de [...] ideas, analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones — en una palabra, las formas más útiles de representar y formular el tema que lo hace comprensible a otros [...] También incluye una comprensión de qué hace que el aprendizaje de ciertos temas sea fácil o difícil: las concepciones y preconcepciones de los estudiantes de diferentes edades y los antecedentes de lo aprendido. (SHULMAN, 1986, p. 9)

Desde esta perspectiva, el profesorado debe tener dominio de las estrategias de enseñanza de las Matemáticas, de los recursos o materiales didácticos a utilizar en esta asignatura, del currículum matemático, de los procesos de pensamiento matemático de las y los alumnos, de la demanda cognitiva de las tareas y de las representaciones adecuadas de conceptos o procedimientos matemáticos (ALFARO, FLORES y VALVERDE, 2020; CHICK *et al.*, 2006; SOSA, FLORES y CARRILLO, 2016). Por tanto, se puede decir que el *Conocimiento Didáctico del Contenido* está determinado por el contenido matemático que se enseña (CARRILLO, ESCUDERO y FLORES, 2014).

El *Conocimiento Didáctico del Contenido* comprende tres subdominios: *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas*, *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas*, y *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas* (Figura 1). Estos subdominios mantienen una estrecha relación entre sí y se vinculan con el conocimiento matemático del profesor, como se explica a continuación:

- El *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas* comprende los saberes que posee el profesorado con respecto a las estrategias, secuencias y materiales didácticos; las metodologías de enseñanza; y las representaciones y ejemplos para enseñar un determinado contenido matemático, los cuales deben plantearse en función del perfil del alumnado — contexto personal y académico

(CARRILLO, ESCUDERO y FLORES, 2014; ROJAS, 2014).

- El *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas* está relacionado con el dominio que las y los docentes tienen sobre el nivel del desarrollo cognitivo y el perfil de sus estudiantes (CARRILLO, ESCUDERO y FLORES, 2014; SCHOENFELD, 2002). También implica conocer y dar solución a los errores y dificultades que presenta el alumnado en un determinado contenido, indagar las causas de estos (CARRILLO, ESCUDERO y FLORES, 2014), y saber cómo ocurre el aprendizaje de las Matemáticas desde diferentes enfoques, comprendiendo las “teorías o perspectivas que [...] aporten a la caracterización del proceso de aprender matemáticas” (ROJAS, 2014, p. 62).
- Finalmente, el *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas* se refiere al dominio que el profesorado tiene de la propuesta y los objetivos del currículo matemático, así como de su habilidad para estructurar y conectar los contenidos de los planes y programas de estudio (CARRILLO, ESCUDERO y FLORES, 2014). El profesorado debe poder *hilar* y relacionar los contenidos del Plan y programas de estudio, para que el alumnado comprenda su sentido y evitar posibles dificultades en su aprendizaje (PERERA y VALDEMOROS, 2007). Por tanto, el tercer subdominio es el entendimiento del profesorado sobre los temas que abarcan los programas de estudio en Matemáticas y la capacidad para ubicarlos en un tiempo y contexto determinado — por ejemplo, enseñar la multiplicación de fracciones después de la suma y resta (CARRILLO, ESCUDERO y FLORES, 2014).

3 Funcionalidad y significados de la multiplicación con fracciones

Las fracciones se constituyen como un recurso fenomenológico de los números racionales, ya que son el punto de partida para su aprendizaje (FREUDENTHAL, 1986), además de ser la base para comprender los conceptos de razón, proporción y medida. Además, no se puede acotar la fracción solo como la acción de dividir y tomar (FREUDENTHAL, 1986; LAMON, 2012), pues su comprensión también está sujeta a múltiples interpretaciones — parte-todo, proporción, operador, cociente y medida (FREUDENTHAL, 1986; HINCAPIÉ, 2011; LAMON, 2012).

Es fundamental que el alumno distinga la diferencia entre multiplicar números naturales y números racionales, para así evitar errores conceptuales y procedimentales

(RIFANDI, 2014). En el conjunto de los números naturales, de acuerdo con Castro, Rico y Castro (1988), multiplicar involucra obtener un producto a través de dos factores, multiplicando (cantidad que se repite y que representa un número cardinal concreto) y multiplicador (número de veces que se repite el multiplicando y que representa un cardinal de segundo orden). En cambio, en el conjunto de los números racionales, la multiplicación de dos fracciones es la fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el resultado de multiplicar los denominadores (GODINO *et al.*, 2003).

Sweetland (1984) y Son (2012) señalan que hay dos tipos de multiplicación de fracciones cuyo numerador es menor que el denominador: la multiplicación de dos fracciones y la multiplicación de un entero por una fracción. La primera se da cuando dos fracciones son multiplicadas entre sí y el producto es menor a los factores; por ejemplo, $\frac{5}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{28}$, donde $\frac{5}{7} > \frac{3}{4} > \frac{15}{28}$. Para demostrarlo gráficamente, Son emplea el siguiente procedimiento, el cual implica la realización de tres pasos y muestra la multiplicación de fracciones como la acción de *tomar tantas partes de otra parte*:

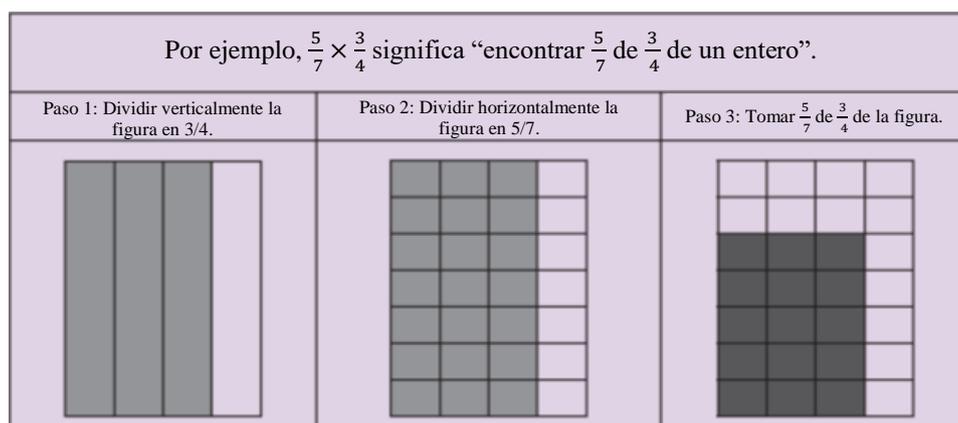


Figura 2: Desarrollo geométrico de la multiplicación de una fracción por otra (SON, 2012, p. 392).

En cambio, la multiplicación de un entero por una fracción se da cuando, al multiplicar un número entero por una fracción, el resultado es menor que la fracción (SWEETLAND, 1984). Por ejemplo, $3 \times \frac{2}{4} = \frac{6}{4}$, tal que $\frac{2}{4} < \frac{6}{4}$. En este caso, el orden de los factores determina el significado de la multiplicación, es decir, cuando el entero precede a la fracción ($n \times \frac{a}{b}$) se hace referencia a la suma repetida, donde el número entero indica la cantidad de conjuntos o las veces que se repite la fracción. De acuerdo con Son (2012), la multiplicación como suma repetida se puede expresar gráficamente de la siguiente manera, por ejemplo, para $3 \times \frac{2}{4}$:

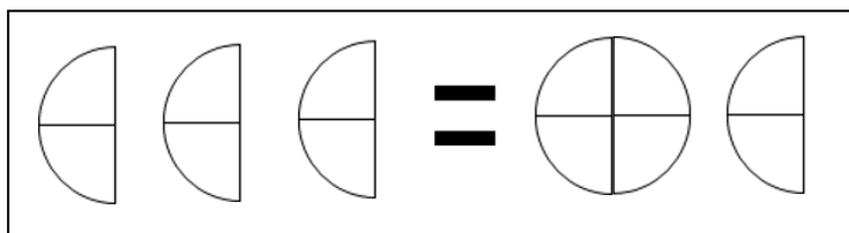


Figura 3: Ejemplo de graficar la multiplicación de fracciones como suma repetida.

En la figura anterior, se puede observar la suma como 3 veces $\frac{2}{4}$. En cambio, si la fracción es el primer factor y el entero es el segundo se trata de una multiplicación donde la fracción tiene rol de operador ($\frac{a}{b} \times n$) y lo que se busca es obtener una parte del entero; por ejemplo, $\frac{3}{4} \times 12 = \frac{36}{4}$, el cual muestra que se toman $\frac{3}{4}$ partes del 12. Son (2012) presenta dos modelos para comprender la multiplicación de fracciones como operador (Figura 4).

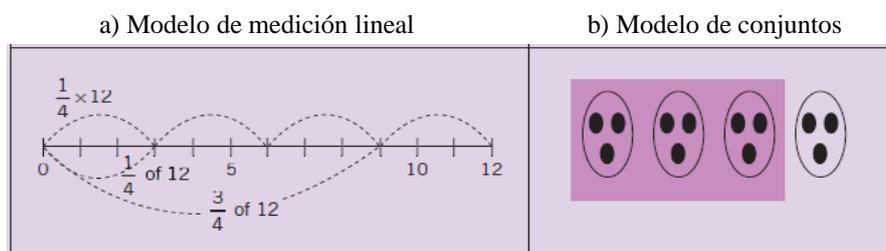


Figura 4: Modelos para la multiplicación que involucra la fracción como operador (SON, 2012, p. 390).

En el Modelo de medición lineal (inciso *a*) se emplea la recta numérica dividida en unidades que constituyen la región entera, que, a su vez, se divide en partes iguales de los que se toman n partes en función de la fracción. En cambio, en el segundo modelo (inciso *b*) se muestra la agrupación de unidades en conjuntos, de los cuales, únicamente, se toman n conjuntos, también en función de la fracción.

4 Diseño metodológico

La presente investigación es un estudio de casos de corte cualitativo y descriptivo (COHEN, MANION y MORRISON, 2007), donde se busca tener una aproximación al conocimiento didáctico del contenido inmerso en las acciones de una profesora, en un determinado tiempo y en un contexto natural (RODRÍGUEZ, GIL y GARCÍA, 1999).

En el estudio participó una docente de sexto grado de educación primaria en México, a quien se identifica con el seudónimo de María y quien fue seleccionada en función de cinco criterios: (1) que laborara en alguna escuela pública de educación primaria; (2) que fuera docente de sexto grado en ese nivel educativo, debido a que en este grado escolar se introduce la multiplicación de números fraccionarios (véase MÉXICO, 2011a, p. 76-78); (3) que tuviera, al menos, un año de experiencia docente en

educación básica; esto, debido a que la realidad de cualquier docente se construye, en parte, gracias a la experiencia que se da dentro y fuera del salón de clases (SCHOENFELD, 2002); (4) que basara su enseñanza en el Plan y programas de estudio 2011 (MÉXICO, 2011a), mismo que estaba vigente al momento de la recolección de datos; y (5) que aceptara participar libremente en el estudio.

La elección de la participante se concretó de mutuo acuerdo con ella y con su directora de escuela. Cuando se realizó el trabajo de campo, María tenía dos años impartiendo clases en sexto grado, de una escuela rural en México; su grupo estaba conformado por 24 estudiantes, en su mayoría, de 12 años de edad. Durante la recolección de la información, esta escuela contaba con doce grupos, dos por grado escolar; cada grupo tenía entre 20 y 30 estudiantes y los contenidos trabajados se apegaban al Plan y programas de estudio 2011 (MÉXICO, 2011a, 2011b).

La recolección de información se llevó a cabo en 2016 y comprendió dos etapas: observación de aula y entrevista. En la primera etapa, se videograbaron las clases en las que María impartió el tema de multiplicación de fracciones, tratando de no interrumpir la dinámica natural y habitual del aula (MOUG, 2007), en total se videograbaron dos sesiones de clases, cada una de 60 minutos. Las observaciones se realizaron en las fechas indicadas por la profesora (13 y 15 de septiembre de 2016), respetando su programación didáctica y el Plan y programas de estudio de la Secretaría de Educación Pública (MÉXICO, 2011a, 2011b). En la segunda etapa, se aplicó una entrevista para profundizar sobre el conocimiento didáctico del contenido que María consideró necesario para enseñar la multiplicación de fracciones, en particular, para “entender el mundo desde la perspectiva del entrevistado, y desmenuzar los significados de sus experiencias” (ÁLVAREZ-GAYOU, 2003, p. 109).

Para el análisis de las clases observadas, se tomaron como categorías *a priori* los tres subdominios del *Conocimiento Didáctico del Contenido* descritos por Carrillo, Escudero y Flores (2014) y también se obtuvieron subcategorías emergentes de los datos recopilados, las cuales se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 1: Categorías de análisis sobre el conocimiento didáctico del contenido de María

Categorías <i>a priori</i>	Subcategorías emergentes
1. <i>Conocimiento de la Enseñanza de la multiplicación de fracciones</i> : Conocer las distintas estrategias de enseñanza que el	1.1. <i>Estrategias de enseñanza</i> : Conocimiento sobre los procedimientos de enseñanza que llevan al alumnado al aprendizaje de la multiplicación de fracciones.

profesorado usa para fomentar el aprendizaje de la multiplicación de las fracciones. También involucra conocer los recursos y materiales que le permitan acercar el contenido a las y los estudiantes, así como los ejemplos y representaciones pertinentes para abordar este contenido.

1.2. *Materiales didácticos y recursos*: Conocimiento sobre los medios o instrumentos que facilitan al alumnado trabajar y poner en práctica la fracción y la multiplicación con estos números racionales.

1.3. *Representaciones*: Maneras en la que el profesorado presenta el contenido, aclara dudas o introduce los procedimientos y significados del objeto matemático.

2. *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas*: Conocer cómo aprende el alumnado la multiplicación de fracciones; identificar y solucionar posibles errores, limitaciones y dificultades asociadas a este contenido; e identificar el lenguaje usado por los estudiantes.

2.1. *Conocimientos previos*: Conocimiento acerca del bagaje matemático del alumnado en relación con la fracción y el algoritmo de la multiplicación con estos números racionales.

2.2. *Perfil del alumno*: Conocimiento sobre las características del alumnado a tomar en cuenta para enseñar un tema (e.g., enfoques didácticos), es decir, en qué se apoya para aprender, así como el conocimiento de la influencia del entorno personal del alumnado para comprender la multiplicación de fracciones.

2.3. *Dificultades del alumno*: Conocimiento sobre las dificultades que el alumnado enfrenta al aprender la multiplicación de fracciones, el porqué de los errores y cómo ayudarlo.

3. *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de la multiplicación de fracciones*: Conocer lo que el currículo le pide al profesorado en cada etapa del ciclo escolar; la relación entre los contenidos relacionados con la multiplicación de fracciones, de acuerdo con el Plan y programas de estudios, y conocer las sugerencias didácticas y de materiales que éste propone.

Fuente: Elaboración Propia

Las videograbaciones de las clases se transcribieron y codificaron de acuerdo con las categorías y subcategorías de la Tabla 1. Esta codificación permitió identificar características del conocimiento didáctico de María, inmersas en su práctica docente al enseñar la multiplicación de fracciones. Además, se analizó la información obtenida de la entrevista a partir de las categorías y subcategorías antes descritas, y se seleccionaron fragmentos para argumentar lo sucedido en las clases observadas. A continuación, se presentan los resultados, tomando en consideración las categorías del conocimiento didáctico de María en torno a la multiplicación de fracciones.

5 Resultados

De acuerdo con el análisis de la información, en la práctica de María se identificaron características de su conocimiento didáctico del contenido relacionadas con la enseñanza de la multiplicación de fracciones. En el caso de esta docente, el subdominio

Conocimiento de la Enseñanza de la multiplicación de fracciones se caracterizó por el uso de la estrategia de descubrimiento en torno al algoritmo convencional de la multiplicación de fracciones, así como el desarrollo de inferencias para determinar cómo funciona el algoritmo y la relación que se establece entre los dos factores, y la implementación de material didáctico para manipular y representar gráficamente el algoritmo. El subdominio *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de los estudiantes sobre la multiplicación de fracciones* se cristalizó en acciones como la exploración de los saberes previos (escolares y no escolares) e intuiciones de las y los estudiantes sobre este contenido, así como en el planteamiento de contextos y situaciones que, en ocasiones, se alejan de la realidad del alumnado y que se relacionan con el objeto matemático. Finalmente, en el subdominio de *Estándares de aprendizaje de la multiplicación de fracciones*, se identificó que María da importancia a lograr los objetivos del Plan y programas de estudio en torno a darle significado a la multiplicación de fracciones como parte-todo y suma reducida, aunque también tiene libertad de hacer adecuaciones.

En los siguientes subapartados, se muestra cómo aparecen las características del conocimiento didáctico del contenido de María en su práctica para llevar a las y los estudiantes a comprender la multiplicación de las fracciones como parte-todo y suma reducida. Para ello, se toman en cuenta los subdominios del conocimiento didáctico del contenido (CARRILLO, ESCUDERO y FLORES, 2014).

5.1 Conocimiento de la enseñanza de las Matemáticas

Para enseñar el algoritmo y el significado de la multiplicación de fracciones, María hizo referencia, tanto en su práctica como en la entrevista, al uso de una variedad de estrategias de enseñanza; por ejemplo, el aprendizaje por descubrimiento dirigido, pregunta y respuesta, uso de inferencias, situaciones problema y actividades lúdicas. La estrategia que sobresalió en la práctica de María es el aprendizaje por descubrimiento dirigido e inferencias, lo que coincide con lo reportado por Domínguez (1991) y donde ella guio a las y los estudiantes en su proceso de aprendizaje, mediante actividades cuyo propósito era que infirieran el algoritmo convencional de la multiplicación con fracciones de la forma $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

En las actividades de aprendizaje por descubrimiento implementadas por la docente, apoyadas con el uso de inferencias, se utilizaron dos materiales didácticos o

recursos: los modelos geométricos realizados por los estudiantes con tiras de papel y los gráficos en el pizarrón elaborados por la docente. A continuación, se presentan cómo la docente implementó la estrategia de aprendizaje por descubrimiento dirigido y cómo empleó los materiales didácticos para darle significado $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ y $n \times \frac{a}{b}$.

5.1.1 Tiras de papel y figuras geométricas para representar $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

Para darle significado a la multiplicación de la forma $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ María propone trabajar $\frac{4}{9} \times \frac{2}{4} = \frac{8}{36}$ centrados en que las y los alumnos infirieran este algoritmo con apoyo de tiras de papel y figuras geométricas. Para ello, María pidió a sus estudiantes que recortaran una tira de papel y la dividieran en partes iguales de acuerdo con los factores (Figura 5). Las y los alumnos, con la guía de la docente, primero dividieron la tira de papel en novenos y, después, colorearon cuatro de ellos para representar $\frac{4}{9}$; enseguida, dividieron cada noveno coloreado en cuatro partes iguales, de las cuales sombrearon dos de cada noveno para representar $\frac{2}{4}$. Posteriormente, María les indicó, en el gráfico, qué parte sombreada de toda la tira representa $\frac{8}{36}$, como se puede ver en la Figura 5 y en el siguiente fragmento de la clase.

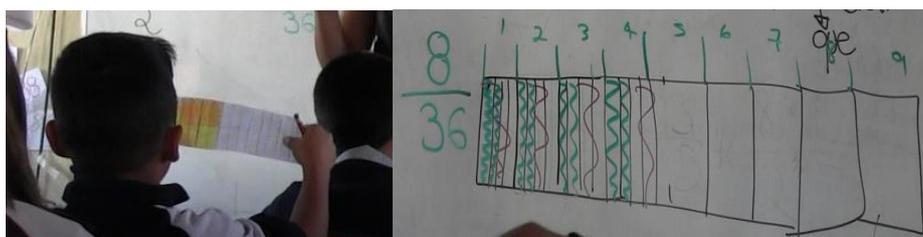


Figura 5: Actividad para descubrir, de manera guiada y gráfica, el algoritmo de $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

María: *Después de tiras, al final de la clase, ya cuando lo pongamos también en algún tipo de problema, lo contextualicemos, ahora sí [...] yo espero que todos me digan: “yo ya sé hacerlo de manera directa” [...] Pregunta, ojo porque aquí está la respuesta [...] De todo lo que coloreamos, ¿cuántos cuadritos, de estos dé a dos [se refiere a los $\frac{2}{4}$ que tomó de $\frac{4}{9}$] coloreamos? Cuéntenlos.*

Alumnos: ¡8!

María: *Ahora, como los partí todos [se refiere a cada noveno del entero dividido a su vez en cuartos], ¿cuántos cuadritos me salieron al final? [Les pide a los estudiantes que sumen los cuartos de cada noveno].*

Alumnos: ¡4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36!

María: *36... Las partes en que yo partí [los novenos] se pone abajo. La respuesta de esta multiplicación es $\frac{8}{36}$.*

Durante la clase, María intentó no develar el algoritmo directo de la multiplicación de fracciones, sino que, al dividir y sombrear partes de la tira de papel, permitió que las

y los alumnos infieran que $\frac{4}{9} \times \frac{2}{4} = \frac{4 \times 2}{9 \times 4} = \frac{8}{36}$. De acuerdo con su intervención y guía, María dio por hecho de que los niños se percataron del algoritmo, al dividir y tomar partes de la figura, donde la multiplicación es dada como una suma reducida y el producto como parte-todo. Asimismo, el orden de los factores que ella empleó, difiere de lo planteado por Son (2012) y el Plan y programas de estudio (MÉXICO, 2011a), en otras palabras, María utiliza $\frac{2}{4}$ como operador multiplicativo para obtener la parte de $\frac{4}{9}$.

5.1.2 Tiras de papel y figuras geométricas para representar $n \times \frac{a}{b}$

Además, como parte de este proceso de descubrimiento y validación, María también dio oportunidad a las y los estudiantes de inferir el algoritmo con la multiplicación de la forma $n \times \frac{a}{b}$, a través de tiras de papel y figuras geométricas. Para ello, la docente les planteó la multiplicación $5 \times \frac{2}{4}$:

María: *Para cerrar lo de fracciones [...] contéstenmelo sin tiras [...] va a explicar Alondra, dígales a todos.*

Alondra: *Lo que pasó fue que los 5 enteros se multiplican por el 2 y se pasa el 4.*

María: *El 4, yo ya sé que lo voy a pasar, pero ¿cómo lo voy a encontrar a veces? ¿Por cuál número se tiene que multiplicar el 4 para que me dé 4?*

Alumnos: *¡Por 1!*

María: *¿Dónde creen que puedo poner el 1? Ahí, [convierte los 5 enteros en fracción: $\frac{5}{1} \times \frac{2}{4}$]... ¿ 5×2 ? 10 ¿ 1×4 ? 4 .*

Para ilustrar cómo se obtiene el producto de multiplicar $n \times \frac{a}{b}$, María mostró que el 5 también pertenece a los números racionales al considerar que va entre 1, es decir, $\frac{5}{1}$. Asimismo, usó la propiedad de elemento neutro para dar significado al denominador 4 en el producto ($\frac{10}{4}$). El momento de validar el algoritmo se llevó a cabo cuando María indicó que el producto se obtiene de multiplicar los denominadores y los numeradores por separado. Llama la atención que, en este tipo de multiplicación, la docente sí consideró el orden de los factores en la representación gráfica, a diferencia de $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

En sentido, las tiras de papel y la representación gráfica — o visual — son recursos didácticos fundamentales en los que se apoya María. Para enfatizar y validar el algoritmo de $n \times \frac{a}{b}$, María también propone trabajar $4 \times \frac{2}{3}$, donde da cuenta paso a paso cómo se desarrolla el algoritmo mediante la división de tiras de papel y cómo se representa de manera gráfica y la finalidad es mostrar la multiplicación como una suma reiterada:

María: *Ahora les traigo otro reto, ¿cómo puedo multiplicar 4 enteros por $\frac{2}{3}$? ¿Qué es lo que necesito entonces? En esa hoja de papel, vamos a ir sacando enteros ¿sí? Dice que necesito 4 enteros. Yo necesito 4 tiras, porque son 4 enteros.*

Alumnos: *[Miden y recortan hojas de papel para obtener cuatro tiras que representan los enteros, mientras que María representa gráficamente la multiplicación en el pizarrón (Figura 6)].*

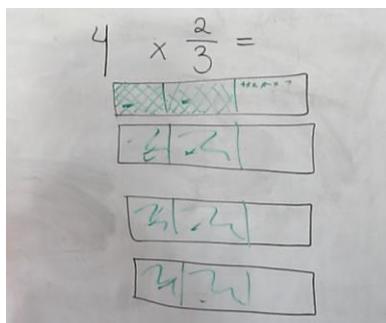


Figura 6: Representación gráfica para generalizar el procedimiento de $n \times \frac{a}{b}$

María: *¿Qué es lo que tengo que hacer? Estos son cada uno de mis enteros ¿sí? [Señala los rectángulos dibujados en el pizarrón] Ahora, me tengo que fijar en la siguiente fracción que es $\frac{2}{3}$. ¿Qué creen que tenemos que hacer?*

Alumno: *Cada entero partirlo en 3.*

María: *Vamos a partir cada entero en tercios [los alumnos miden o doblan las tiras para obtener tercios]. Ahora, ¿qué me está pidiendo mi fracción también? Ya lo partí en tercios, tengo que agarrar 2 de cada entero. ¿Cómo le vamos a hacer? Ahora sí, con su lápiz o su pluma le van a hacer algún trazado [i.e., sombreado de $\frac{2}{3}$ de cada entero] sobre la hoja de papel.*

María empleó una representación gráfica para ejemplificar el algoritmo de la multiplicación de fracciones por enteros, mientras que sus estudiantes tuvieron que recrear esta representación con tiras de papel, de modo que el producto $\frac{8}{3}$, gráficamente, es dado como la suma de las partes sombreadas de las tres tiras de papel. El que las y los estudiantes manipularan, elaboraran y diseñaran su propio material los convirtió, en la clase de María, en sujetos activos y autónomos involucrados en la creación y adquisición de nuevos conceptos y aprendizajes (ESCH, 1996; PÁEZ, MEDINA y PÉREZ-MARTÍNEZ, 2020).

La relevancia de usar este material (tiras de papel y la representación gráfica o lo visual) para la construcción del algoritmo podría deberse a su fácil manipulación y a su accesibilidad. Al respecto, la profesora hizo énfasis, durante la entrevista, en la relevancia de utilizar el material didáctico adecuado para impartir la multiplicación de fracciones:

Hay muchísimos recursos: su plan de estudio, su diagnóstico, interactivos, de internet, hojas de trabajo, hay material concreto, que yo puedo diseñar. Ahora sí que para fracciones hay una infinidad, porque todo se puede dividir. Entonces, todo depende de [...] qué le interesa a usted, qué les llama la atención a sus niños.

María menciona una variedad de recursos didácticos para abordar la multiplicación de fracciones, desde materiales audiovisuales, tecnologías de la información y la comunicación, materiales concretos y manipulativos, hasta aquellos diseñados por el mismo docente. Las propiedades principales de estos recursos son el atractivo y pertinencia, en otras palabras, deben ser adecuados al bagaje matemático del alumnado, a su contexto personal y al currículum, para así captar su atención y lograr, finalmente, que se involucren con el contenido matemático.

De igual manera, un aspecto fundamental en el conocimiento didáctico de María son las características que deben tener las actividades empleadas en el aula. Para ella, es claro que se deben lograr los objetivos de aprendizaje y esto implica que las actividades deben apegarse al currículum escolar, ya considera que este es un documento oficial donde están los contenidos a tratar y los aprendizajes esperados, así como el perfil matemático del alumnado.

María señala que las actividades lúdicas para la enseñanza de la multiplicación de fracciones deben de ser pertinentes para el alumnado (ejemplo, en las tiras de papel, donde los niños crean su propio material) y deben darle la oportunidad de interactuar con el objeto matemático. Tales actividades deben involucrar el juego, ayudar a que el estudiante comprenda lo que se le está enseñando, y no llevarlo a la memorización o provocar dificultades en la comprensión del tema. En congruencia con lo señalado por Yasoda (2009), para María el juego rompe, en cierta forma, con la idea de que las Matemáticas son rutinarias y estrictas, de modo que las acerca a la realidad del alumnado.

5.2 Conocimiento de las características del aprendizaje de las Matemática

Un aspecto del conocimiento didáctico de María es considerar los conocimientos previos de sus estudiantes y su contexto para involucrarlos en el tema de la multiplicación de fracciones. En relación con el primer punto, como se vio en el apartado anterior, la docente tomó en cuenta los conocimientos previos de las y los estudiantes acerca de temas como el diseño de figuras geométricas, la multiplicación con números enteros, y la relación entre numerador y denominador de una fracción para obtener la parte-todo y la representación gráfica de esa relación. Asimismo, aunque en menor medida, María planteó situaciones familiares para las y los alumnos, como una manera de involucrarlas e involucrarlos en problemas de su vida cotidiana; por ejemplo:

María: *En una hoja nueva, dicto un problema, ¡uhm! ¿Quién cumple años este mes?*

Alumnos: ¡Rubén!

María: ¡Okay!, le ponemos: Rubén compró 3 pasteles... [interrumpe el dictado para preguntarle al alumno] ¿De qué te gustan los pasteles Rubén?

Rubén: De Chocolate.

María: ¡Ah! [retoma el dictado], uno era de chocolate, otro de vainilla y el tercero de nuez. De cada pastel Rubén se comió $\frac{2}{7}$ de rebanadas, ¿cuánto pastel se comió Rubén en total?

A través de este tipo de situaciones familiares, la profesora buscó acercar el objeto matemático a los intereses del alumnado y a su contexto personal, de modo que la multiplicación de fracciones fuera significativa para ellas y ellos en otros contextos además del escolar. Al respecto, María habló, durante la entrevista, acerca de la importancia de incorporar contextos conocidos por los estudiantes para el aprendizaje de la multiplicación de fracciones:

Generalmente, cuando le preguntas a un niño sobre cualquier ejercicio sobre [...] multiplicación de fracciones siempre va a dar un ejemplo de algo que él ha vivido.

De acuerdo con lo que señaló en la entrevista, María reconoce la importancia de tomar en cuenta el perfil de sus estudiantes, pero también mencionó que no siempre es fácil incorporarlo en clases. Un ejemplo de ello es plantear la situación del cumpleaños, pero la manera de cómo está planteado se aleja de la realidad del alumnado en términos del número de porciones por pastel y el tamaño de cada una. Aunque la situación planteada en clases es general y difiere de la realidad, María dio cuenta de la importancia de conocer el perfil del alumnado a través de sus experiencias y del ambiente social que las y los rodea, esto permite que le den significado al objeto matemático y lo integren a su vida cotidiana. Por otra parte, María atribuyó la dificultad de tomar en cuenta la realidad de alumnado a presiones académicas, evaluativas y curriculares:

Hay ciertas evaluaciones que se les hace a los alumnos a equis tiempo, que a nosotros como maestros pues nos traen con el Plan [y programas de estudio] a todo lo que da. Entonces, si yo me centro en la individualidad de cada alumno, no voy a alcanzar. Hay muchísimas situaciones que no nos permiten llegar a eso [tomar en cuenta el contexto del alumno] como carga administrativa, que, si le toca conmemorar lo de la Navidad, actividades de ruta de mejora, conjunto de contenidos de cada asignatura, imprevistos personales.

De acuerdo con la Secretaría de Educación Pública (MÉXICO, 2011b), el profesorado debe tomar en cuenta las necesidades específicas del alumnado, lo que, de acuerdo con María, es imposible. La percepción de la profesora coincide con lo reportado por Ball, Lubienski y Mewborn (2001) y Yasoda (2009), quienes aseguran que las y los profesores tienden a cambiar sus planeaciones y actividades para así cubrir todos los

temas que el currículum y las sesiones evaluativas les solicitan, lo que se les dificulta basarse en la realidad del alumnado.

En la entrevista, María también destacó algunas de las dificultades que tienen las y los docentes en la enseñanza de la multiplicación de fracciones, mismas que se relacionan con los retos que las y los alumnos enfrentan para comprender este tema y otros que resultan indispensables para su desarrollo, las tablas de multiplicar, el algoritmo de multiplicar números enteros y la identificación de las partes de la fracción:

Si no se saben las tablas de multiplicar, se van a perder. [Otra dificultad es] que no sepan multiplicar, que yo les diga de manera directa “vas a multiplicar numerador por numerador y denominador por denominador” y que se queden en “¿cuál es el numerador?, ¿cuál es el denominador?”; que si yo quiero que implementen tiras [de papel], no sepan cómo partirlas [dividir las]; que si yo les digo “lo vas a dividir en cuartos”, no sepan cómo partirlo en cuartos.

La manera más sencilla de enseñar fracciones es no obviar ciertas situaciones, porque hay veces que nosotros entendemos qué es un entero, pero los niños no entienden qué es un entero, no entienden qué implica el entero.

Las dificultades que mencionó María se pueden agrupar en dos categorías. La primera se refiere a la falta de conocimientos previos y abarca aspectos tales como las tablas de multiplicar y conceptos básicos de fracciones (el significado de numerador o denominador). La segunda se relaciona con los conocimientos procedimentales del alumnado para llevar a cabo multiplicaciones y obtener fracciones a partir de diversos materiales y recursos.

Asimismo, María resaltó la importancia de considerar los conocimientos previos que tiene las y los estudiantes acerca de la fracción y la unidad, ya que debe partir de estos conocimientos, como ella dice: “la manera más sencilla de enseñar fracciones es no obviar ciertas situaciones”.

5.3 Estándares de aprendizaje de la multiplicación de fracciones

Un elemento del conocimiento didáctico del contenido es el dominio que se tiene sobre el currículum escolar. Con respecto a este tema, María indicó que hay diferencias entre las sugerencias del Plan y programas de estudio y lo que en realidad se enseña en clases:

El Plan y programas de estudio ni siquiera coincide con el libro de texto. El Plan de estudios, por ejemplo, muestra lo que son los aprendizajes esperados (i.e., objetivos de aprendizaje), lo que son los contenidos nada más [...] El Plan y programas de estudio sí maneja algunos otros conceptos como qué tipo de competencias, más bien, es una explicación de por qué utilizamos aprendizajes y demás. El Libro para el maestro ya no maneja aprendizajes esperados, maneja contenido y la

intención didáctica, por ejemplo, objetivos de aprendizaje.

María hizo una descripción amplia del Plan y programas de estudio y su contenido, y aseguró que este tiene como propósito darle a conocer al profesor los temas a seguir y las competencias a desarrollar. Asimismo, la maestra enfatizó que el Plan y programas de estudio es una sugerencia que se debe tomar a reserva de la realidad personal y académica del alumnado, y que las y los docentes tienen la responsabilidad de darle significado al contenido a enseñar, dependiendo de las características de sus estudiantes.

Cuando se le preguntó a María si la propuesta del libro de texto es suficiente para enseñar la multiplicación de fracciones, ella mencionó que considera que este recurso es adecuado para lograr este propósito, pero son los estudiantes quienes presentan dificultades:

Lamentablemente, no todos los niños tienen el nivel adecuado para que solamente con los ejercicios del libro alcancen el aprendizaje. Es por eso que como tarea tienes que saber en qué nivel están tus alumnos para hacer tus adecuaciones.

La maestra indicó que los conocimientos previos del alumnado influyen directamente en el éxito del empleo del libro de texto. Asimismo, señaló que considera que, en ocasiones, la propuesta didáctica de estos materiales requiere ser reforzada con otras actividades, ya que no es suficiente para lograr el aprendizaje en los estudiantes. Esto coincide con Schoenfeld (2002), quien afirma que las y los docentes tienen que analizar e identificar cómo piensan y experimentan las Matemáticas las y los alumnos, con el fin de evaluar y determinar si el libro de texto y el currículum manejan enfoques didácticos y metodologías que beneficien el aprendizaje del alumnado.

Además, algo que difiere con los estándares curriculares es enseñar la multiplicación como $n \times \frac{a}{b}$ (SEP, 2014). Las explicaciones que María dio a sus estudiantes sobre esta forma de multiplicación muestran, en general, su dominio y conocimiento en torno a este algoritmo y su capacidad para transmitirlo. En clases, la maestra explicó a sus estudiantes la multiplicación de enteros con fracciones a manera de suma reducida y señaló cómo debe ser el orden de los factores:

Para que se nos haga más fácil, vamos a tratar siempre de poner primero los enteros, ¿sí? En una multiplicación, es lo mismo si lo pongo acá [como primer factor] que lo ponga acá [como segundo factor].

Para la profesora no hay una diferencia de significado en cuanto al entero como

primer o segundo factor, pues su argumento se centró en el producto. El significado de la multiplicación de fracciones como suma reducida predominó en la práctica de María, y, aunque no lo expresa de forma explícita, sí lo hace de manera tácita, como se muestra al trabajar $4 \times \frac{2}{3}$.

6 Conclusiones

Los resultados muestran que María centró su conocimiento didáctico del contenido en enseñar la fracción como parte-todo y la multiplicación de fracciones como suma reiterativa, lo que podría llevar a sus estudiantes a creer que la multiplicación de fracciones solo es una suma reiterativa, como lo señalan Isiksal y Cakiroglu (2010) y Prediger (2008). Por otro lado, comprender la multiplicación de fracciones solo de esa manera, difiere de los objetivos del currículo escolar mexicano (MÉXICO, 2014), pues se espera que el alumnado de educación básica también identifique la fracción como operador multiplicativo en la expresión $\frac{a}{b} \times n$, es decir, obtener la parte de un número entero.

El conocimiento didáctico de María sobre el contenido de la multiplicación de fracciones se caracteriza, principalmente, por las estrategias didácticas que buscan favorecer el aprendizaje de este objeto matemático. En particular, resalta la estrategia de descubrimiento e inferencia y el uso de materiales didácticos como las tiras de papel y su representación visual (figuras geométricas), gracias a las cuales las y los estudiantes tuvieron la oportunidad de construir su propio conocimiento con la guía de la profesora, al dejarlos manipular y visualizar gráficamente el algoritmo de la multiplicación de fracciones. Con las estrategias de descubrimiento e inferencia, María favoreció procesos metacognitivos y de autonomía, al generar espacios donde las y los alumnos tienen la posibilidad de ser sujetos reflexivos ante sus descubrimientos e inferencias. En sentido, “una de las expectativas de los procesos de enseñanza y de aprendizaje en Matemáticas es que los profesores promuevan que los estudiantes sean autónomos en su propio aprendizaje, en términos de que reflexionen y regulen sus acciones en tareas matemáticas” (CÁZARES, PÁEZ y PÉREZ-MARTÍNEZ, 2020, p. 222).

Además, el papel de María como guía en esta estrategia permitió que el alumnado comprendiera e identificara los datos que están inmersos en el algoritmo de la multiplicación de fracciones, cómo se relacionan entre sí, y cómo esa relación está dada gráficamente. En término de Schoenfeld (2002), lo que hizo la docente fue orientar a las

y los estudiantes en la comprensión e identificación de la información que se requiere para resolver un problema y en el proceso de implementar este algoritmo.

Por su parte, el uso de tiras de papel fue relevante como material didáctico, ya que dio la oportunidad a las y los estudiantes de manipular *físicamente* el algoritmo y de representarlo gráficamente, al estar dividiendo en partes iguales las tiras para dar cuenta del algoritmo de la multiplicación de fracciones, de tal manera que el alumnado hizo sus propias manipulaciones y representaciones en cada uno de los ejercicios que María les planteó. En términos de Hill Rowan y Ball (2005) y NCTM (2014), este recurso fue usado por la profesora con el objetivo de que las y los estudiantes comprendieran cómo funciona el algoritmo y vieran, gráficamente, la relación entre la parte-todo y la multiplicación como una suma reiterada, de modo que le dieran significado. Además, la literatura científica destaca la importancia de usar contextos y modelos visuales para ayudar al alumnado explorar las ideas subyacentes de la multiplicación de fracciones y profundizar en su comprensión (NCTM, 2014; SON, 2012).

El procedimiento que siguió la docente al dividir y tomar partes de los gráficos, coincide con el que plantea Son (2012), aunque el orden difiere y podría generar errores conceptuales acerca de cuál de los dos factores es el operador multiplicativo.

Como parte del conocimiento didáctica de María sobre este contenido matemático también es importante señalar la relevancia que le dio a los saberes y contextos de las y los estudiantes. Su finalidad fue darle sentido y aplicación a este algoritmo en situaciones de la vida real del alumnado. Lo anterior lleva a retomar lo señalado por Ball, Thames y Phelps (2008) y el NCTM (2013) con respecto a la necesidad de generar contextos que favorezcan el aprendizaje de las Matemáticas, de modo que el alumnado le encuentre sentido en su vida cotidiana.

Por otra parte, se identificó que la profesora domina los conceptos y la estructura del Plan y programas de estudios (MÉXICO, 2011a, 2011b), aunque en la entrevista y en las clases observadas se muestra que María tiene discrepancias entre lo que señala el currículo oficial y lo que se enseña en el aula. Asimismo, la docente manifestó que el conocimiento sobre el currículo escolar (programas, planes de estudio y libro de texto), le permitió evaluar oportunamente la viabilidad de la implementación de los recursos curriculares, tomando en cuenta las particularidades y necesidades de sus estudiantes y la calidad de la información que se presenta en estos documentos sobre el objeto matemático.

Finalmente, cabe señalar que el presente estudio es un aporte al conocimiento de la práctica docente en Matemáticas y, específicamente, al campo de estudio sobre el conocimiento didáctico de las y los profesores en la enseñanza de la multiplicación de fracciones. Además, se busca que los hallazgos aquí presentados brinden insumos y elementos para el diseño de estrategias de enseñanza que favorezcan el aprendizaje de este tema.

Agradecimiento

Agradecemos a la profesora por su participación en el presente estudio, y las Mtras. Paloma Prado Robledo, Lucía Magdalena Rodríguez Ponce y Claudia Magaly Ruiz Luna por la revisión y sus aportaciones hechas a este documento.

Referencias

ALFARO, Christian Roberto; FLORES, Pablo; VALVERDE, Gabriela. [Conocimiento especializado de profesores de Matemática en formación inicial sobre aspectos lógicos y sintácticos de la demostración](#). *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, Granada, v. 14, n. 2, p. 85-117, 2020.

ÁLVAREZ-GAYOU, Juan Luis. *Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología*. México: Páidos, 2003.

ARTEAGA, Pedro; BATANERO, Carmen; GEA, María Magdalena. [La componente mediacional del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre Estadística: un estudio de evaluación exploratorio](#). *Educação Matemática Debate*, Montes Claros, v. 1, n. 1, p. 54-75, jan./abr. 2017. BALL, Deborah Loewenberg; LUBIENSKI, Sarah Theule; MEWBORN, Denise Spangler. Research on teaching Mathematics: the unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En: RICHARDSON, Virginia (Ed.). *Handbook of Research on Teaching*. New York: Macmillan, 2001, p. 433-456.

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES Mark Hoover; PHELPS Geoffrey. [Content knowledge for teaching: What makes it special?](#) *Journal of Teacher Education*, v. 59, n. 5, p. 399-406, 2008.

CARRILLO, José; CLIMENT, Nuria; CONTRERAS, Luis Carlos; MUÑOZ-CATALÁN, María. Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En: *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Antalya: Middle East Technical University, 2013, p. 2985-299.

CARRILLO, José; ESCUDERO, Dinazar; FLORES, Erick. El uso del MTSK en la formación inicial de profesores de Matemáticas de primaria. *Revista de Análisis Matemático-Didáctico para Profesores*, v. 1, n. 1, p. 16-26, 2014.

CASTRO, Encarnación; RICO, Luis; CASTRO, Enrique. *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar*. España: Editorial Síntesis, 1988.

CÁZARES, Milagros de Jesús; PÁEZ, David Alfonso; PÉREZ-MARTÍNEZ, María Guadalupe. [Discusión teórica sobre las prácticas docentes como mediadoras para potencializar estrategias metacognitivas en la solución de tareas matemáticas](#). *Revista Educación Matemática*, Ciudad de México, v. 32, n. 1, p. 221-240, abr. 2020.

CHICK, Helen; BAKER, Monica; PHAM, Thuy; CHENG, Hui. Aspects of teachers' pedagogical content knowledge for decimals. En: *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the PME*. Praga: Charles University in Prague, 2006, p. 297-304.

COHEN, Louis; MANION, Lawrence; MORRISON, Keith. *Research methods in Education*. Londres: Routledge, 2007.

DOMÍNGUEZ, Mariano. [El aprendizaje por descubrimiento dirigido aplicado a la enseñanza de las Matemáticas](#). *Suma*, Barcelona, n. 7, p. 39-41, 1991.

ESCH, Edith. Promoting Learner Autonomy: criteria for the selection of appropriate methods. En: PEMBERTON, Richard; LI, Edward; OR, Winnie; PIERSON Herbert. (Ed.). *Taking control. Autonomy in language learning*. Honk Kong: Honk Kong University Press, 1996, p. 35-48.

FLORES, Rebeca. Los significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria. En: *Actas de la 25^a Reunion Latinoamericana de Matemática Educativa*. Camagüey: Universidad de Camagüey, 2011, p. 23-31.

FREUDENTHAL, Hans. *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company, 1986.

GODINO, Juan Díaz. [Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de Matemáticas](#). *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, Andujar, n. 20, p. 13-31, 2009.

GODINO, Juan; RECIO, Ángel; RUIZ, Francisco; ROA, Rafael; PAREJA, Juan Luis. Recursos interactivos para el estudio de las fracciones. En: *Actas del 18^o Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de la Matemática*. Córdoba: Universidad de Córdoba, 2003, p. 1-14.

HILL, Heather; ROMAN, Brian; BALL, Deborah Loewenberg. [Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement](#). *American Educational Research Journal*, Vanderbilt, v. 42, n. 2, p. 371-406, 2005.

HINCAPIÉ, Claudia Patricia. *Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la institución educativa San Andrés de Girardota*. Medellín: Universidad Nacional de Colombia, 2011.

ISIKSAL, Mine; CAKIROGLU, Erdinc. [The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: the case of multiplication of fractions](#). *Journal of Mathematics Teacher Education*, v. 14, n. 3, p. 213-230, 2010.

ISKENDEROGU, Tuba Aydogdu. [Fraction multiplication and division word problems posed by different years of pre-service elementary mathematics teachers](#). *European Journal of Educational Research*, v. 7, n. 2, p. 373-385, 2018.

JOHANNING, Debra. [Getting past the sticking points: a questioning framework for fraction multiplication](#). *Ohio Journal of School Mathematics*, Ohio, n. 82, p. 24-28, 2019.

LAMON, Susan. *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Nueva York: Routledge, 2012.

MAKHUBELE, Yeyisani Evans. [The analysis of grade 8 fractions errors displayed by learners due to deficient mastery of prerequisite concepts](#). *International Electronic Journal of Mathematics Education*, Eastbourne, v. 16, n. 3, p. 1-15, 2021.

MEDINA, Indira Viridiana. Análisis del conocimiento didáctico del profesor de educación primaria para impartir la multiplicación de fracciones. 2018. 156f. Tesis (Maestría en Investigación Educativa) — Departamento de Educación. Universidad Autónoma de Aguascalientes. Aguascalientes.

MÉXICO. Secretaría de Educación Pública. [Desafíos matemáticos. Libro para el maestro](#). Ciudad de México: SEP, 2014.

MÉXICO. Secretaría de Educación Pública. [Plan de Estudios. Educación Básica. Primaria](#). Ciudad de México: SEP, 2011a.

MÉXICO. Secretaría de Educación Pública. [Programa de estudios. Guía para el maestro. Primaria. Sexto grado](#). Ciudad de México: SEP, 2011b.

MIOLA, Adriana Fatima; LIMA, Talita Emily de Aguiar. [Conhecimentos necessários para o ensino de números racionais no ensino Fundamental](#). *Educação Matemática Debate*, Montes Claros, v. 4, n. 10, p. 1-16, 2020.

MOUG, Peter. [Non-participative observation in political research: the ‘poor’ relation?](#) *Politics*, Goldsmiths, v. 27, n. 2, p. 108-114, 2007.

NCTM — National Council of Teachers of Mathematics. *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston: NCTM, 2014.

NCTM — National Council of Teachers of Mathematics. [Supporting the common core state standards for Mathematics](#). New York: NCTM, 2013.

PÁEZ, David Alfonso; MEDINA, Indira Viridiana; PÉREZ-MARTÍNEZ, María Guadalupe. Introducing fraction multiplication. A study on teacher’s pedagogical knowledge. En: *Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Ciudad de México: Cinvestav/AMIUTEM/PME-NA, 2020, p. 860-866.

PERERA, Paula; VALDEMOROS, Martha. Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. En: CAMACHO, Matias; FLORES, Pablo; BOLEA, María Pilar. (Org.). *Investigación en Educación Matemática*. San Cristóbal de la Laguna: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 2007, p. 209-221.

PREDIGER, Susanne. [The relevance of didactic categories for analyzing obstacles in conceptual change: revisiting the case of multiplication of fractions](#). *Learning and Instruction*, v. 18, n. 1, p. 3-17, 2008.

RAHAYU, Chika; PUTRI, Ratu Ilma. Multiplication of fraction with natural number by using hurdles. En: *Proceedings of the 5th South East Asia Development Research International Conference*. Mangkurat: Universitas Lambung Mangkurat, 2017, p. 43-47.

RIANASARI, Veronika Fitri; JULIE, Hongki. [Seventh grade students' performance in dealing with multiplication of fractions](#). En: *Proceedings of the International Conference on Mathematics: Education, Theory, And Application*. Sebelas Maret: Universitas Sebelas Maret, 2017, p. 165-169.

RIFANDI, Ronal. *Developing grade 5 students understanding of multiplication of two fractions*. Surabaya: Universidad Estatal de Surabaya, 2014.

RODRÍGUEZ, Gregorio; GIL, Javier; GARCÍA, Eduardo. *Metodología de la investigación*. México: Aljibe, 1999.

ROJAS, Nielka. *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de Matemáticas: un estudio de casos*. 2014. 335f. Tesis (Doctorado en Educación) — Facultad de las Ciencias de la Educación. Universidad de Granada. Granada.

SCHOENFELD, Alan. H. [Making mathematics work for all children: Issues of standards, testing, and equity](#). *Educational Researcher*, North Carolina, v. 31, n. 1, p. 13-25, 2002.

SHULMAN, Lees S. [Those who understand: knowledge growth in teaching](#). *Educational Researcher*, North Carolina, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SON, Ji.-Won; KWON, Oh Hoon; YEONG, Ji. How Korean textbooks and eureka math use representations involving fraction multiplication. En: *Proceedings of the 41th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Louis: University of Missouri, 2019, p. 111-119.

SON, Ji-Won. [Fraction multiplication from a Korean perspective](#). *Mathematics Teaching in the Middle School*, Reston, v. 17, n. 7, p. 388-393, 2012.

SOSA, Leticia; FLORES, Erick; CARRILLO, José. [Conocimiento de la enseñanza de las Matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal](#). *Educación Matemática*, Ciudad de México, v. 28, n. 2, p. 151-174, 2016.

SWEETLAND, Robert D. [Understanding multiplication of fractions](#). *Arithmetic Teacher*, Washington, v. 32, n. 1, p. 48-52, 1984.

YASODA, Rapuru. *Problems in teaching and learning mathematics*. Nueva Delhi: Discovery Publishing House, 2009.