

# A modelagem matemática como uma metodologia investigativa e crítica nas aulas de Matemática

## Mathematical modelling as an investigative and critical methodology in Mathematics classes

Polyanna Possani da Costa Petry

Kátia Maria de Medeiros

Edna Lopes Hardoim

Débora Eriléia Pedrotti Mansilla

**Resumo:** Ressaltamos que, a busca por metodologias que estejam adequadas a um ensino que possibilite a formação intelectual e cidadã dos alunos, torna-se cada vez mais forte e emergente. Nessa perspectiva, as diferentes tendências da Educação Matemática podem contribuir de modo decisivo e, no caso particular das tendências Modelagem em Educação Matemática e Investigação Matemática na Sala de Aula, observamos aspectos que convergem. Neste sentido, refletimos aqui, possibilidades da Modelagem Matemática como uma metodologia investigativa nas aulas de Matemática, o que pode favorecer ou dificultar a implementação desta metodologia na sala de aula e sobre a importância da comunicação oral entre os participantes das interações, na fase de validação, particularmente.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática. Investigações Matemáticas na Sala de Aula. Comunicação Oral. Reflexões.

**Abstract:** We emphasize that, the search for methodologies that are suitable for teaching that enables the intellectual and citizen education of students becomes increasingly strong and emerging. In this perspective, the different Trends in Mathematics Education can make a decisive contribution and, in the specific case of the Modelling in Mathematical Education and Mathematical Investigation in the Classroom trends, we observe converging aspects. In this regard, we reflect, in this article, about the possibilities of Mathematical Modelling as an investigative methodology in Mathematics classes, as well as about what may favor or hinder this methodology's implementation in the classroom and about the importance of oral communication between the participants of the interactions, in the validation phase, particularly.

**Keywords:** Modelling Mathematics. Mathematical Investigation in the Classroom. Oral communication. Reflections.

### Polyanna Possani da Costa Petry

Doutoranda em Educação em Ciências e Matemática. Professora da Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT), campus Sinop. Mato Grosso, Brasil.

 [orcid.org/0000-0003-2374-8575](https://orcid.org/0000-0003-2374-8575)

 [polyanna.possani@unemat.br](mailto:polyanna.possani@unemat.br)

### Kátia Maria de Medeiros

Doutora em Educação. Professora da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). Professora Colaboradora do Doutorado em Educação em Ciências e Matemática pela Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC). Paraíba, Brasil.

 [orcid.org/0000-0002-9576-9992](https://orcid.org/0000-0002-9576-9992)

 [katiamedeirosuepb@gmail.com](mailto:katiamedeirosuepb@gmail.com)

### Edna Lopes Hardoim

Doutora em Ecologia e Recursos Naturais. Professora do Mestrado Profissional em Ensino de Biologia em Rede Nacional e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais, ambos da Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT). Professora do Doutorado em Educação em Ciências e Matemática pela Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC). Mato Grosso, Brasil.

 [orcid.org/0000-0003-2327-6731](https://orcid.org/0000-0003-2327-6731)

 [ehardoim@terra.com.br](mailto:ehardoim@terra.com.br)

### Débora Eriléia Pedrotti Mansilla

Doutora em Ecologia e Recursos Naturais. Professora do Mestrado Profissional em Ensino de Biologia em Rede Nacional e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais, ambos da Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT). Professora do Doutorado em Educação em Ciências e Matemática pela Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC). Mato Grosso, Brasil.

 [orcid.org/0000-0001-7869-651X](https://orcid.org/0000-0001-7869-651X)

 [deborapedrotti@gmail.com](mailto:deborapedrotti@gmail.com)

Recebido em 01/05/2020

Aceito em 02/07/2020

Publicado em 30/07/2020

## 1 Introdução

O presente artigo é uma expansão de um texto produzido no âmbito de uma disciplina do Doutorado em Educação em Ciências e Matemática no âmbito da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC), no segundo semestre de 2019. A utilização e discussão de metodologias em que o estímulo à investigação, exploração, problematização, são pontos principais quando se deseja contrapor o não sucesso do ensino tradicional; não são exclusividade dos dias atuais, no entanto tornam-se cada vez mais fortes. Isto por se acreditar que metodologias tradicionais e conteudistas não atendem mais a sociedade em que vivemos, tendo em vista que há uma inadequação deste modelo para formar cidadãos, nesta sociedade atual, nas democracias.

É preciso formar indivíduos participativos, que entendam seu papel numa sociedade democrática. Nesse sentido, a escola, a sala de aula e a aula, que não necessariamente é na sala de aula, precisam de educandos, no sentido freiriano, atuando em colaboração pela autonomia e liberdade (FREIRE, 1996) e não mais alunos que vem da escola burguesa, fundamentada na filosofia iluminista — que é o ser sem luz, a-luno, e o professor seria aquele que lhe traria a luz.

As concepções sobre a Matemática e o currículo, igualmente precisam ser revistas e superadas (D'AMBROSIO, 2016). A Matemática, no século XX, teve algumas mudanças, em nível superior, como o Teorema da Incompletude de Gödel, que nos fazem precisar olhar para ela com outros olhos e a Geometria dos Fractais, que pode e deve ser explorada na escola básica também, mas que o futuro professor de Matemática precisa conhecer sobre estes temas e trabalhar com eles, desde o nível superior, numa relação dialética, também entre os níveis de ensino.

O currículo, de mesmo modo, precisa ser trabalhado focando numa epistemologia atualizada e com os elementos que colocamos acima, não mais como linear ou apenas cartesiano, mas como redes de relações e ideias, como uma práxis (MACHADO, 2016). Este modelo de aula deve ser gradativamente alterado, a partir da Licenciatura em Matemática, com a formação de um professor que conheça a teoria e e outros elementos. Neste sentido, as aulas investigativas são as que podem contribuir para se alcançar estas mudanças, tão necessárias hoje.

As diversas tendências da Educação Matemática, como a Resolução de Problemas, a Modelagem Matemática, as Investigações Matemáticas na Sala de Aula, a Etnomatemática, a História da Matemática, entre outras, se forem conhecidas e utilizadas, bem planejadas, e refletidas, podem ser decisivas nesta emergência de um novo modelo de aula, com professor e educandos com novos papéis e a Matemática e seu currículo, concebidos com as ideias e

elementos mais recentes. Uma aula, nesta perspectiva tem, como afirma D'Ambrosio (2019) a pesquisa como elo entre a teoria e a prática. Desse modo, o papel do educando precisa ser ativo, questionador, investigativo, tal qual o do professor que também encoraja o educando a agir e refletir criticamente, em busca de conhecimentos e aprendizagens.

Aulas que utilizam as Investigações Matemática e a Modelagem Matemática em Educação Matemática têm em comum, também, estes aspectos referentes aos papéis do professor e dos alunos e a concepção sobre a Matemática e o seu currículo. Nessa perspectiva, este trabalho tem por objetivo refletir sobre a Modelagem como uma metodologia investigativa nas aulas de Matemática, apontando semelhanças estruturais entre as duas tendências e refletindo sobre elas.

Essas duas tendências apresentam potencial para a formação dos futuros professores de Matemática, pois a partir de problemas reais, podem contribuir para o diálogo entre todos os participantes da atividade. Neste sentido, apontar semelhanças estruturais entre ambas possui um caráter didático na formação inicial, que pode contribuir, também, para uma maior reflexão de futuros professores para as características de cada metodologia e lhes propiciar saber melhor selecioná-las em seus planejamentos de aulas.

Desta forma, apresenta-se referencial teórico para a Investigação Matemática na Sala de Aula na perspectiva de Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) e Modelagem Matemática na Educação Matemática nas concepções de Bassanezi (2014, 2015), Meyer, Caldeira e Malheiros (2011), Biembengut (2016), Barbosa (2004), Araújo (2002, 2009), Araújo, Rocha e Martins (2006), Burak (2004) e Almeida (2010, 2020). A partir daí, buscamos apresentar apontamentos com relação aos aspectos comuns, que ambas as tendências apresentam e refletir a possibilidade da Modelagem Matemática como uma metodologia investigativa nas aulas de Matemática.

Nas sessões seguintes, refletimos sobre possibilidades da Modelagem Matemática como uma metodologia investigativa nas aulas de Matemática, ressaltamos alguns elementos presentes nas interações da sala de aula, que podem favorecer ou dificultar a implementação desta metodologia e sobre a importância da comunicação oral entre os participantes das interações, na fase de validação, particularmente. Por fim, apresentamos as considerações finais e referências.

## 2 Referencial teórico

Todo movimento de discussão, reflexão e proposição de mudanças com relação ao

assunto ensino e aprendizagem nas diversas áreas, em particular da Matemática, está centrado, essencialmente, nos modelos de ensino. Metodologias investigativas representam o conceito das metodologias que buscam alternativas para mudar o cenário do ensino centralizado no professor, sendo o aluno o receptor passivo de um conteúdo pronto e acabado. Essas metodologias centram-se principalmente na transformação da postura do aluno, de modo que este seja cada vez mais participativo na construção do seu conhecimento, sendo o aluno o ator principal e o professor o mediador nesse processo. Na prática, isso ocorre proporcionando-se um ambiente em que o aluno seja estimulado a pesquisar, buscar estratégias e encontrar soluções para uma situação-problema que faça sentido para ele.

## 2.1 Aulas Investigativas de Matemática

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2019, p. 1), “investigar é procurar algo que não se sabe”. Os autores começam apontando vários significados que esta palavra pode assumir, em diferentes idiomas e contextos.

Essa busca também acontece, muitas vezes, quando os professores querem inovar em suas aulas, e se afastarem de uma concepção de ensino que vê a Matemática como uma ciência pronta, que não mais se renova e nem está sendo criada pelos matemáticos. Neste sentido, os autores mostram um pouco de como a investigação é vista pelos matemáticos, até apresentarem as investigações como tarefas matemáticas, que podem ser trabalhadas na sala de aula e propiciarem aos alunos perceberem um pouco mais sobre o *fazer matemático*.

Segundos os autores, as investigações são atividades que são muito semelhantes à resolução de problemas. Podem ser desenvolvidas a partir de exercícios, no entanto, terão várias possibilidades de resolução e desafiarão os alunos a buscarem as resoluções. Essas características serão muito relevantes para propiciar uma aprendizagem efetiva por parte dos alunos, pois eles estarão ativos durante as atividades que envolvem as investigações matemáticas.

Numa investigação, apesar do professor conhecer ou programar como as atividades terão início, o caminho a ser tomado por cada aluno no seu desenvolvimento é, na maioria das vezes, imprevisível. Isto porque, durante esse processo, estimulado por suas competências individuais, cada aluno pode percorrer diferentes caminhos, proporcionando o estímulo de diferentes habilidades, tais como, autonomia e criticidade, em sua investigação.

Contudo, Ponte, Brocardo e Oliveira (2019, p. 25-26) destacam que, habitualmente, a atividade de investigação na sala de aula é desenvolvida nas seguintes etapas: “(i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado”.

Esse caminho, desconhecido durante a investigação, pode ser relacionado também ao percurso da pesquisa. Nesse sentido,

ensinar, aprender e pesquisar lidam com esses dois momentos do ciclo gnosiológico: o em que se ensina e se aprende o conhecimento já existente e o em que se trabalha a produção do conhecimento ainda não existente. A “do-discência” — docência-discência — e a pesquisa, indicotomizáveis, são assim práticas requeridas por estes momentos do ciclo gnosiológico. (FREIRE, 1996, p. 28)

Por esse entendimento, fica justificada a importância e relação da pesquisa nos processos do ensino e de aprendizagem. Investigar, portanto, é fazer uma pesquisa didática. É transformar a sala de aula num ambiente de experiências didáticas. Todos os envolvidos estão pesquisando.

## 2.2 Modelagem Matemática em Educação Matemática

De acordo com Bassanezi (2015) muitas ideias matemáticas surgiram a partir de problemas práticos, assim como a Matemática já desenvolvida passou a ser usada em diversas situações, podendo-se considerar que a arte de aplicar a Matemática é tão antiga quanto a própria Matemática. A contextualização a seguir, apresentada por Bassanezi e Ferreira Jr. (1988), fornece uma ideia de como o início da ciência Matemática e a aplicação da Matemática se confundem:

Começamos pelo início da Matemática, que provavelmente surgiu na Babilônia depois do ano 300 a.C. Não é difícil imaginar a motivação principal de sua origem como a necessidade de contar objetos, mas por volta do ano 200 a.C. tabletas cuneiformes, obtidas de escavações arqueológicas, demonstraram que os Acadianos, que habitavam a Babilônia na época, já dispunham da noção abstrata de número inteiros e da sua Aritmética. Por outro lado, os mesmos tabletas mostraram que esta aritmética era usada para cálculos de comprimentos, áreas, volumes, pesos, cálculos financeiros e de estoque de mercadoria, proporção de colheita devida como imposto, censo demográfico etc. (BASSANEZI e FERREIRA JR, 1988, p. 3)

Nessa perspectiva, traz-se o conceito de modelo matemático que, para Bassanezi (2014, p. 20), é “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado”. Continuando, o autor explicita que “a obtenção do modelo matemático

pressupõe, por assim dizer, a existência de um dicionário que interpreta, sem ambiguidades, os símbolos e operações de uma teoria matemática em termos da linguagem utilizada na descrição do problema estudado, e vice-versa” (BASSANEZI, 2014, p. 25). Em conseguinte, o processo para obtenção e validação desse modelo é o que se define, de modo geral, como a Modelagem Matemática.

Em Bassanezi (2014, p. 24) tem-se que “A Modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual”. As etapas da modelagem, conforme o autor, dividem-se em cinco: experimentação (obtenção dos dados); abstração (formulação dos modelos matemáticos); resolução; validação (processo de aceitação ou não do modelo proposto) e modificação (quando na validação ocorreu a rejeição dos modelos).

Para Biembengut (2016, p. 99), a modelagem trata de “dispor os dados de um fenômeno ou da questão investigada em sintonia com alguma estrutura (Matemática) que possibilite representá-los e, principalmente, possibilitar uma descrição, uma resposta ou solução plausível”. Conforme a autora, ao perpassar pelo processo de modelagem, definido em três fases — percepção e apreensão; compreensão e explicitação; significação e expressão —, o indivíduo tem sua percepção e aprendizagem estimuladas de maneira que a teoria passa a fazer sentido.

Perpassar pelas etapas da Modelagem estimula nosso senso cognitivo: ao interpretar sobre os dados empíricos, fazer a tradução Matemática, adaptar a algum modelo existente e obter um modelo físico (análogo ou de escala), interpretar a validade do modelo de acordo com a realidade. Por assim, os conceitos teóricos não são incorporados apenas como ‘ato de fé’ das teorias, mas, especialmente, passam a fazer sentido (BIEMBENGUT, 2016, p. 151).

Assim, a Modelagem Matemática perfaz o caminho da pesquisa científica por meio de estímulos que proporcionam a aprendizagem, tais como, investigação, criatividade, senso crítico, autonomia entre outros. E nessa perspectiva, considerando que no caminho de solucionar ou compreender situações-problema, o indivíduo, por seus meios, constrói significados, é que a Modelagem insere-se na Educação Matemática. Além disso, buscamos analisar a relação entre as etapas da Investigação Matemática na Sala de Aula definidas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) e a Modelagem em Educação Matemática.

De acordo com Bassanezi (2015), o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino-aprendizagem oportuniza o exercer da criatividade no desenvolvimento das habilidades

## Matemáticas:

Nos últimos tempos, diversos pesquisadores, em especial nas universidades, têm buscado caminhos para a renovação pedagógica ao criar ambientes de ensino e aprendizagem favoráveis à capacitação de pessoas com perfil adequado aos novos tempos. O ensino-aprendizagem com modelagem Matemática é um dos frutos mais ricos e promissores dessa busca. (BASSANEZI, 2015, p. 11)

Para o autor, a Modelagem Matemática, tanto na perspectiva de pesquisa quanto como uma estratégia de ensino-aprendizagem, não difere com relação às suas definições, , “a modelagem — que pode ser tomada tanto como um método científico de pesquisa quanto como uma estratégia de ensino-aprendizagem — tem se mostrado muito eficaz” (BASSANEZI, 2014, p. 16). Desta forma, as etapas apresentadas anteriormente para Modelagem Matemática como pesquisa, aplica-se também para a Modelagem como estratégia de ensino e de aprendizagem, sendo elas: i) Experimentação: obtenção dos dados; ii) Abstração: formulação dos Modelos Matemáticos; iii) Resolução; iv) Validação: processo de aceitação ou não do modelo proposto; v) Modificação: quando na validação ocorreu a rejeição dos modelos.

Relacionando com as etapas da Investigação na Sala de Aula pode-se considerar o seguinte: (i), (ii), (iii), (iv) e (v) da Modelagem em Educação Matemática com (ii) e (iii) da Investigação na Sala de Aula.

Meyer, Caldeira e Malheiros (2019) discutem ser preciso mudar aquele sistema de que a Matemática possui um universo à parte, em que a maioria das pessoas não consegue relacioná-la com seu cotidiano ou compreender sua utilidade. Quando se verifica historicamente, obtém-se um panorama de que a Matemática foi desenvolvida a partir de um objetivo, com algum fim, tais como, “os egípcios desenvolveram o cálculo de área porque tinham de fazer as medições das terras do Nilo; os fenícios desenvolveram conceitos aritméticos de contabilidade, porque eram comerciantes. Era, na verdade, uma Matemática *para* algum fim” (MEYER, CALDEIRA e MALHEIROS, 2019, p. 24).

A partir de tal abordagem, os autores justificam a importância e necessidade de *agora* não ser diferente, isto é, para que o aluno aprenda é preciso deixar de colocar a Matemática como um objeto a ser ensinado, mas sim uma Matemática que faça sentido para o aluno e que este se sinta estimulado por algum objetivo, algum fim.

E o que queremos? Queremos, como professores, usar ferramentas Matemáticas, cujo manejo e domínio estejam disponíveis para o aluno a fim de que ele possa estudar,

entender, formular, resolver e, principalmente decidir. O que queremos dos nossos alunos? Crítica, raciocínio, curiosidade, independência, autonomia, responsabilidade. (MEYER, CALDEIRA e MALHEIROS, 2019, p. 25)

Apresentando, assim, diante de todo esse contexto, a Modelagem — e aqui Modelagem está no contexto da Educação Matemática — e conceituando-a como “o sujeito do processo cognitivo é o *aprendedor*, é o aluno. Cada pessoa constrói seu conhecimento, o sujeito atribui significados pelos próprios meios” (MEYER, CALDEIRA e MALHEIROS, 2019, p. 24). Como etapas para o processo de Modelagem, os autores apresentam cinco momentos: i) Determinar a situação a ser estudada; ii) Simplificar as hipóteses dessa situação; iii) Resolver o problema matemático decorrente; iv) Validar as soluções matemáticas de acordo com a questão real; v) Definir a tomada de decisão com base nos resultados.

Comparando com as etapas da Investigação na Sala de Aula temos a seguinte relação: (i) da Modelagem em Educação Matemática com (i) da Investigação na Sala de Aula; (ii), (iii), (iv) e (v) da Modelagem em Educação Matemática com (ii) e (iii) da Investigação na Sala de Aula.

Para Biembengut (2016), a Modelagem Matemática na Educação, definida pela autora como Modelação. Trata-se do processo de adaptação dos processos de Modelagem com o objetivo de “promover conhecimento ao estudante em qualquer período de escolaridade, e ensiná-lo a fazer pesquisa nessa estrutura escolar, isto é: no espaço físico e no período concernente a este propósito” (p. 175). Para a autora, a Modelação ocorre nas seguintes etapas: i) Percepção e apreensão: determinação do tema/assunto; reconhecimento e familiarização com a situação-problema; ii) Compreensão e explicitação: formulação do modelo; iii) Significação e expressão: interpretar, avaliar e validar não somente o modelo obtido, mas também suas contribuições, expressando para a turma o que se foi produzido.

Ao relacionar com as etapas da Investigação na Sala de Aula podemos verificar as semelhanças: (i) da Modelagem em Educação Matemática com (i) da Investigação na Sala de Aula; (ii) da Modelagem em Educação Matemática com (ii) da Investigação na Sala de Aula e (iii) da Modelagem em Educação Matemática com (iii) da Investigação na Sala de Aula.

Entre as razões que são discutidas, em geral, em defesa da inclusão da Modelagem no currículo, Barbosa (2004, p. 2) chama a atenção para o argumento referente ao “desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sócio-cultural da matemática”. Para o autor, este ponto está diretamente relacionado com o interesse de formar sujeitos críticos para atuar de maneira ativa na sociedade, sujeitos com compreensão das tomadas de decisões sociais,

que envolvem as aplicações da Matemática. Segundo o autor, as atividades de Modelagem contribuem para se levantar questionamentos, discussões e reflexões referentes à natureza das aplicações da Matemática.

Nesse contexto, para Barbosa (2004), a Modelagem é um ambiente de aprendizagem, que ele chama de ambiente de Modelagem, associado a investigação e problematização. Para o autor, nesse ambiente, os alunos são convidados a problematizar e investigar situações da realidade por meio da Matemática. Ele ilustra com três estudos de caso que, independentemente dos contextos escolares, com projetos pequenos ou mais longos, é possível trabalhar com situações reais numa perspectiva crítica. O autor descreve o processo de Modelagem em quatro tarefas: i) Formulação do problema; ii) Simplificação; iii) Coleta de dados; iv) Solução.

Estabelecendo uma relação das tarefas descritas acima com as etapas da Investigação na Sala de Aula observamos: (i) e (ii) da Modelagem em Educação Matemática com (i) da Investigação na Sala de Aula; (iii) da Modelagem em Educação Matemática com (ii) da Investigação na Sala de Aula e (iv) da Modelagem em Educação Matemática com (iii) da Investigação na Sala de Aula.

Apesar das diferentes perspectivas que se tem presentes na literatura referente à Modelagem Matemática na Educação Matemática, Araújo (2009) destaca ser possível perceber aspectos comum entre elas; que o principal objetivo está em descrever, por meio da Matemática, uma situação real não-matemática. Nesse contexto, de descrever um fenômeno matematicamente, a autora enfatiza a importância de que esse processo ocorra de modo que os alunos trabalhem em grupo, com problemas da realidade e, principalmente, que sejam escolhidos por eles.

Na concepção de Araújo (2009), o desenvolvimento de um projeto de modelagem, além de instrumentar matematicamente, deve proporcionar ao aluno uma formação crítica, de modo que ele seja capaz de compreender e discutir questões políticas, econômicas e tantas outras que compõem a sociedade na qual a Matemática possa estar presente. Essa compreensão de uma sala de aula como um espaço de diálogo e democrático, que a autora acredita e defende, está amparada na Educação Matemática Crítica de Skovsmose (1994). Nessa perspectiva, a Modelagem na Educação Matemática, para Araújo (2002), é

uma abordagem, por meio da matemática, de um problema não-matemático da realidade, ou de uma situação não-matemática da realidade, escolhida pelos alunos

reunidos em grupos, de tal forma que as questões da Educação Matemática Crítica embasem o desenvolvimento do trabalho. (p. 39)

Com relação às etapas do processo de Modelagem na sala de aula, Araújo, Rocha e Martins (2014) destacam que o desenvolvimento deve ocorrer de maneira estratégica, considerando o contexto e a finalidade que a Modelagem será utilizada, descrevendo-as como: i) Escolha do tema; ii) Elaboração da situação-problema; iii) Coleta e simplificação dos dados; iv) Tradução ou resolução do problema; v) Análise crítica da solução ou validação do modelo.

Comparando com as etapas da Investigação na Sala de Aula, obtemos a seguinte relação: (i) e (ii) da Modelagem em Educação Matemática com (i) da Investigação na Sala de Aula; (iii) da Modelagem em Educação Matemática com (ii) da Investigação na Sala de Aula e (iv) e (v) da Modelagem em Educação Matemática com (iii) da Investigação na Sala de Aula.

Conforme Burak (2004), as diferentes formas que Modelagem Matemática é trabalhada na sala de aula, como alternativa para o ensino de Matemática, está diretamente relacionada às características e percepções dadas pelo professor. Nesse sentido, o autor pondera que a percepção por ele adotada vem de sua experiência na Educação Básica, na qual atuou por 30 anos, com uma compreensão da Modelagem Matemática como uma alternativa metodológica para o ensino de Matemática.

Para Burak (2004), o princípio do trabalho com modelagem está na motivação do grupo, sendo, portanto, essencial que o problema a ser estudado surja a partir do interesse do grupo. Nesse cenário, trabalhando com aquilo que gostam e que tem significado para eles, os alunos têm a oportunidade de se manifestar, ocorrendo uma maior interação nos processos de ensino e de aprendizagem.

Além disso, o autor discute que, nesse formato, o processo de ensino deixa de ser deflagrado pelo professor e passa a ocorrer a partir do compartilhamento dos grupos. O papel do professor é redefinido, de modo que ele passa a ser mediador no processo do conhecimento matemático. Nesse sentido, o uso da Modelagem em sala de aula na perspectiva de Burak (2004) é desenvolvido em cinco etapas: i) Escolha do tema; ii) Pesquisa exploratória; iii) Levantamento dos problemas; iv) Resolução dos problemas e o desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema; v) Análise crítica das soluções.

Quando comparamos com as etapas da Investigação na Sala de Aula temos a seguinte relação: (i) da Modelagem em Educação Matemática com (i) da Investigação na Sala de Aula; (ii)

e (iii) da Modelagem em Educação Matemática com (ii) da Investigação na Sala de Aula e (iv) e (v) da Modelagem em Educação Matemática com (iii) da Investigação na Sala de Aula.

Almeida (2010) indica que, no campo da Educação Matemática, a Modelagem Matemática — o processo de construção de um modelo e sua interpretação —, possui intenções e interesses que estão além dessa construção, ou seja, há um caminho entre a situação inicial (problema) e a situação final desejada (que representa solução para o problema), que integra procedimentos, ações, conceitos matemáticos e não matemáticos, que também estão associados ao aprendizado. De acordo com Almeida (2020, p. 223), “de forma geral, o que esse caminho deve incluir vem sendo incorporado nos chamados ciclos de modelagem matemática”. A autora apresenta o seguinte ciclo presente numa atividade de Modelagem Matemática:

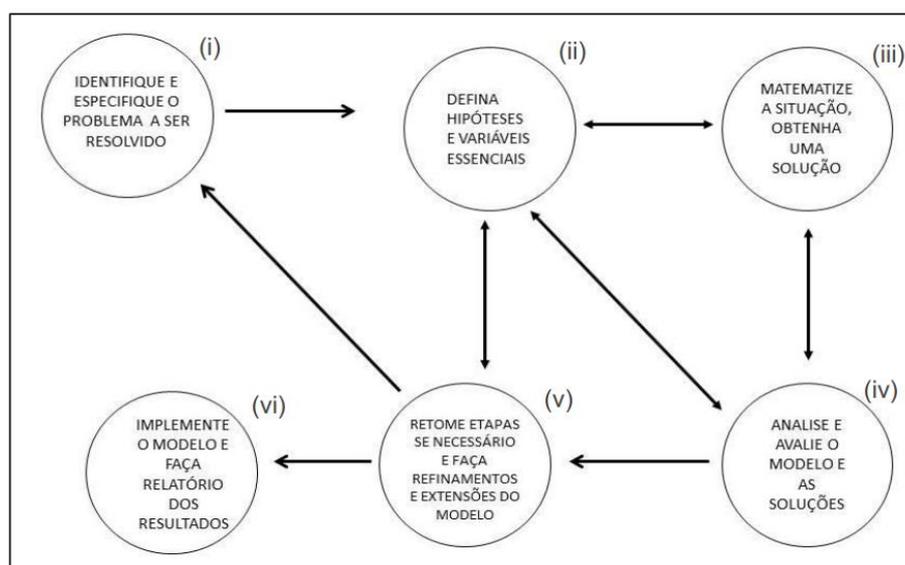


Figura 1: Ciclo de modelagem matemática (ALMEIDA, 2020, p. 223)

Apesar de não considerar exatamente uma ordem, uma vez que existem ações que podem retornar no início do ciclo, antes mesmo do final, podemos obter a seguinte relação com as etapas da Investigação na Sala de Aula: (i) da Modelagem em Educação Matemática com (i) da Investigação na Sala de Aula; (ii) e (iii) da Modelagem em Educação Matemática com (ii) da Investigação na Sala de Aula e (iv), (v) e (vi) da Modelagem em Educação Matemática com (iii) da Investigação na Sala de Aula.

A partir do referencial apresentado referente às concepções da Modelagem na Educação Matemática, na perspectiva de alguns autores, e apontamentos com relação aos seus aspectos comuns com as aulas investigativas, continuamos nossa reflexão da possibilidade de compreender a Modelagem Matemática como uma metodologia investigativa nas aulas de Matemática.

### **3 O que pode favorecer ou dificultar ao abordarmos as tarefas de Modelagem Matemática como uma metodologia investigativa na sala de aula?**

Pelo que colocamos anteriormente, percebemos que a Modelagem Matemática tem fortes relações teóricas com as tarefas de Investigação Matemática. O ponto comum mais claro nos parece ser a postura inquiridora, de pesquisa, que professor e alunos passam a ter nas interações da sala de aula. Contudo, alguns elementos podem ser favoráveis ou dificultar estas interações, no sentido de uma aprendizagem matemática efetiva. Estes elementos podem ser identificados nas complexas interações desta micro sociedade.

Entre esses elementos, ressaltaremos aqui as concepções do professor e do aluno sobre a Matemática; os papéis do professor, do aluno e as concepções sobre a Matemática nas atividades com Investigações Matemáticas e nas atividades com Modelagem Matemática; a relação professor-aluno; as concepções dos alunos sobre a Matemática; as concepções dos alunos sobre a aula de Matemática.

Os papéis do professor e dos alunos nas tarefas de Modelagem Matemática como uma metodologia investigativa precisam ser diferentes daqueles das aulas com exercícios, no ensino direto (PONTE, 2017). Há uma necessidade fundamental de ação dos alunos e de o professor encorajar estas ações nas tarefas matemáticas. O papel de organizador das condições didáticas para o professor e o papel ativo para o aluno são indispensáveis. Caso contrário, não haverá uma mudança no modelo de ensino e de aprendizagem.

Outro aspecto chave a ser considerado nessas interações é o modo como o professor concebe a Matemática, que será decisivo na condução das interações e orientações na sala de aula. Ponte (1992) considera que as concepções têm uma natureza essencialmente cognitiva, e embora distinta dos conceitos específicos, serve de apoio à organização destes conceitos. Para o autor, as concepções constituem uma forma de encarar o mundo, de pensar, não sendo redutíveis aos aspectos imediatamente observáveis no comportamento. Além disso, não são reveladas com facilidade, nem a nós nem aos outros, atuando “como uma espécie de filtro” (PONTE, 1992, p. 185).

Se o professor concebe a Matemática como algo a ser descoberto, como se fosse um conhecimento empírico e não ideal, apresentará uma concepção platônica, segundo a qual, a Matemática está “no mundo das ideias” e este mundo, embora ideal, precisa ser descoberto pelos alunos. Sobre esta concepção,

em relação à concepção de ensino de Matemática, pudemos perceber o quanto ainda está presente a perspectiva filosófica de Platão, na formação inicial de professores de Matemática. Quando um professor ou um estudante consideram a Matemática como sendo estática, imutável, afirmando que o conhecimento é descoberto, e não uma construção humana pode-se dizer que nesses pressupostos há elementos da concepção platônica de mundo. (FERNANDES, 2016, p. 37)

Fernandes (2016) salienta que esta visão do conhecimento matemático como algo pronto e acabado, fundamentado no rigor e formalismo e expresso em linguagem matemática, não tem contribuído para uma formação matemática que atenda às necessidades do professor de Matemática da educação básica.

Apesar de parecer contraditório, quando analisamos criticamente este aspecto, muitos professores e futuros professores ainda apresentam esta concepção. Quando perguntamos, aos futuros professores de Matemática, principalmente nos períodos iniciais da Licenciatura em Matemática, se a Matemática é uma descoberta ou uma invenção, a maioria, muitas vezes, afirma ser uma descoberta. Apenas quando já têm estudado História da Matemática e/ou Etnomatemática, apresentam a concepção de *invenção* ou *criação* humana, mas nem sempre.

Diante disso, percebemos que conceber a Matemática como uma criação humana, que é desenvolvida pelos matemáticos, com formulações e resoluções de problemas, erros (não muitos), com provas e refutações, tal qual Lakatos (1978) assinala, no falibilismo, ainda é pouco aparente, mesmo na formação inicial. Este aspecto pode dificultar a condução das tarefas de Modelagem Matemática como uma metodologia investigativa, pois as tarefas de investigação se fundamentam no método de provas e refutações de Lakatos. Para superar esta dificuldade, cabe ao futuro professor ou ao professor, uma postura de constante leitura e estudo sobre a natureza e a história da Matemática e as implicações destes estudos nas aulas de Matemática.

Outro aspecto relevante, neste cenário, são as concepções do aluno sobre a Matemática. Muitas vezes, os alunos a concebem apenas como contas, cálculos, coleção de exercícios e fórmulas a memorizar. Este tipo de concepção é formada ao longo de anos escolares, sem conhecer e explorar a resolução de problemas nas aulas ou tendo vivenciado um uso inadequado da mesma, pois os professores também, muitas vezes, conduzem as aulas de resolução de problemas, transformando-os em exercícios, não contribuindo para a autonomia dos alunos nem para que concebam a Matemática também como resolução de problemas.

Este aspecto também pode dificultar a condução das tarefas de Modelagem Matemática como uma metodologia investigativa na sala de aula. Para superar esta dificuldade, é fundamental

o trabalho didático com a resolução de problemas, desde os Anos Iniciais, o que propiciará que os alunos compreendam vários aspectos desta tarefa e suas potencialidades.

A relação professor-aluno é outro elemento que pode ser decisivo no desenvolvimento das tarefas de Modelagem Matemática como uma metodologia investigativa. Os alunos, muitas vezes, têm uma postura muito dependente do professor, e isto é reforçado na relação professor-aluno pelo professor.

Contudo, o professor não pode mais apenas requerer o silêncio e as respostas dos alunos às suas perguntas, mas encorajá-los à participação nas aulas, a falarem sobre Matemática, com a colocação de perguntas ao professor e aos demais alunos, argumentações ou explicações. Encorajar a postura atenta e participativa dos alunos, nas aulas de Matemática, é fundamental para que as etapas das atividades de Modelagem Matemática possam emergir nas interações, com um cunho investigativo. Nessa relação, o desenvolvimento da autonomia do aluno pode ser um dos objetivos do professor, conforme destaca Freire (1996, p. 67): “saber que devo respeito à autonomia e à identidade do educando exige de mim uma prática em tudo coerente com este saber”.

Além das concepções que assinalamos acima, as concepções dos alunos sobre a aula de Matemática podem ser uma dificuldade para a implementação destas tarefas. Muitas vezes, para os alunos, a aula de Matemática tem que ser a do modelo que já conhecem no ensino direto (PONTE, 2017). Nessa aula, o professor apresenta um conteúdo, define este conteúdo, apresenta vários exemplos e depois passa uma lista de exercícios. Quando os alunos participam de aulas que não têm mais esta estrutura, muitas vezes, não as consideram como *aula*; até perguntam ao professor: “quando vamos ter aula?” Nesse sentido, consideramos o que Rodrigues e Carreira (2018, p. 61) afirmam que “um dos objetivos principais de uma aula de matemática é o de que os alunos possam dar sentido, relevância e valor à sua atividade e à aprendizagem nesse contexto escolar”.

Diante disso, o professor pode inserir outras tarefas, além dos exercícios, como os problemas, os jogos, as formulações de problemas, de modo a exigir e encorajar nos seus alunos uma postura investigativa. Com isso, gradativamente, poderemos ver a transição do modelo de aula do ensino direto para o ensino e a aprendizagem exploratória (PONTE, 2017).

Apesar da importância que os elementos apontados — como as concepções do professor sobre a Matemática, as concepções dos alunos sobre a Matemática, os papéis do professor e dos

alunos nas aulas de Matemática —, os valores morais e éticos, ensinados, de maneira implícita ou explícita nestas aulas, serão ainda mais relevantes para a formação integral dos indivíduos envolvidos. Eles também se constituem em elementos que podem vir a favorecer ou a dificultar a abordagem das tarefas de Modelagem Matemática como uma metodologia investigativa na sala de aula.

A relevância dos valores decorre de seu caráter também orientador destes outros elementos. Contudo, por este termo ter também um caráter polissêmico, deixamos claro aqui que nos referimos a valores democráticos, norteadores da Educação Matemática. Neste sentido, poderíamos, por exemplo, trabalhar a resolução de problemas matemáticos em diferentes sociedades, que tivessem diferentes valores.

Por exemplo, citamos uma publicação em um blog<sup>1</sup> que trata da Matemática no Regime Nazista. Observamos que os enunciados dos problemas matemáticos, quando interpretados por crianças ou pré-adolescentes, permitiam que esses interpretassem que o Estado Alemão estava gastando o dinheiro dos impostos, de modo desnecessário, com pessoas que possuíam doenças mentais. Desse modo, desde tenra idade, foi transmitido ao cidadão alemão que cuidar destas pessoas não era importante; o mesmo dinheiro gasto nisso, poderia ir para os jovens casais. Era um modo de usar também o ensino da Matemática em favor da ideologia da *Raça Pura*, fundamentada na eugenia, no darwinismo social. Sabemos o que aconteceu com estas pessoas, quando a Alemanha criou os campos de concentração e neles eliminou todos os que eram *indesejados* ao Regime Nazista.

Até a leitura desse texto no blog, não tínhamos conhecimento do ensino de Matemática e, mais ainda, a resolução de problemas, sendo implementado a serviço de valores tão cruéis. Ao saber deste uso ardiloso, por um regime de ódio, que ceifou milhões de vidas, e que ainda tem adeptos declarados e silenciosos, inclusive no Brasil, cada vez mais expostos nesses tempos difíceis que temos vividos nos últimos anos, temos um exemplo mais claro da relevância de entendermos também mais sobre os valores que orientam as práticas educacionais numa sociedade, uma vez que é possível termos alunos muito bem desenvolvidos na interpretação e na criação de estratégias de resolução e problemas matemáticos, mas que defendam valores autoritários e até nazistas, como neste exemplo.

---

<sup>1</sup> Disponível em <http://elbustodepalas.blogspot.com/2011/02/las-matematicas-en-el-regimen-nazi.html>; acesso em 27 mar. 2018, às 18h20

O exemplo que desenvolvemos para a resolução de problemas pode também ser desenvolvido para tarefas de Modelagem Matemática como uma metodologia investigativa, inclusive por também podermos relacionar esta metodologia à resolução de problemas, sendo estes, problemas reais. Tal característica confere a essas tarefas um potencial ainda mais significativo, quando nos referimos a ressaltar os valores morais e éticos, que estamos também trabalhando nas nossas aulas de Matemática. Certamente, a atenção e a participação dos alunos serão muito maiores, quando a situação-problema da tarefa de Modelagem for sobre um tema da realidade e que tem influência na vida deles. Nesse sentido, a escolha por valores democráticos nos parece o mais acertado e coerente com a Educação Matemática, uma vez que

o argumento social da democratização salienta as aplicações da matemática, e a importância das atividades de construção de modelos matemáticos é de fato enfatizada na literatura educacional. A ideia básica no que podemos chamar de tendência pragmática na educação matemática é: é extremamente importante que os estudantes aprendam sobre a construção de modelos, e a melhor maneira de aprender isso é construindo modelo. (SKOVSMOSE, 2001, p. 40).

Nesse sentido, é essencial a clareza sobre os valores democráticos e os diferentes tipos de autoritarismo, que transmitirão valores antidemocráticos, como a superioridade de um grupo social sobre o outro, desprezando a necessidade de respeitar as diferentes características que as pessoas apresentam, como classe social, idade, religião, gênero, orientação sexual, etnia, entre outros aspectos. Onde segue a necessidade de sermos solidários com as diferentes necessidades e limitações das pessoas, em diferentes circunstâncias, e enfatizar o que é válido, em termos de liberdade e justiça.

Como os valores podem favorecer ou dificultar a abordagem às tarefas de Modelagem Matemática como uma metodologia investigativa na sala de aula? Como colocar as tarefas de Modelagem Matemática a favor da investigação de valores democráticos? Valores democráticos fundamentais: justiça e liberdade. Como explorá-los didaticamente, em tarefas de Modelagem Matemática com cunho investigativo?

A exploração dos Temas Transversais do currículo brasileiro (BRASIL, 1998), seria uma possibilidade. Estes temas são relevantes em nossa sociedade, a saber, ética, trabalho, consumo, meio ambiente, saúde, pluralidade cultural e cidadania, transversal a todos eles. Cada tema pode gerar tarefas de Modelagem Matemática com cunho investigativo, ricas e capazes de desencadear importantes reflexões sobre aspectos relevantes da vida social e da democracia no Brasil, que é tão frágil e carece de cidadãos ativos.

Na Base Nacional Comum Curricular BNCC (2017, p. 222) a Modelagem Matemática é apontada como uma possibilidade didática relevante:

Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático: raciocínio, representação, comunicação e argumentação. Neste documento a comunicação nas aulas de Matemática também é valorizada e apontada como parte dos processos de aprendizagem.

A prática letiva com as tarefas de Modelagem Matemática com cunho investigativo, portanto, apresenta dificuldades ao professor e aos alunos, que podem ser perspectivadas como desafios a serem superados com outros aspectos que podem favorecê-las, como apontamos em nossas reflexões anteriores, alguns deles, emergentes nas complexas interações da aula de Matemática.

#### **4 A importância da comunicação oral nas atividades de Modelagem Matemática de cunho investigativo**

A comunicação oral é um importante elemento que precisa ser explorado na aula de Matemática. Tradicionalmente, a aula de Matemática é marcada pelo silêncio ou pelo discurso do professor. Contudo, ao passarmos para o modelo exploratório de ensino e de aprendizagem (PONTE, 2017), esse precisa envolver todos os participantes da aula, o que exige do professor planejar suas aulas para a emergência de diferentes tipos de comunicação oral, tais como explicações, do professor e dos alunos, argumentações, perguntas, padrões de interação e negociação de significados.

Segundo Medeiros e Meira (2019, p. 296), “a comunicação entre os alunos e sua forma de linguagem no momento de desenvolvimento das tarefas ajuda a analisar mais positivamente sua interpretação e aprendizagem e, conseqüentemente, auxilia no processo de avaliação”. Assim, a comunicação oral pode e deve ser explorada por todos nas aulas de Matemática, para também ampliar as possibilidades de aprendizagem.

Nas tarefas de Modelagem Matemática como uma metodologia investigativa, podemos explorar a comunicação, mais intensamente, na etapa de validação. Diferentes autores, conforme

mostramos anteriormente, apontam esta etapa e o seu potencial comunicativo. De acordo com Bassanezi (2014), as etapas de validação: processo de aceitação ou não do modelo proposto e modificação: quando na validação ocorreu a rejeição dos modelos; Biembengut (2016), significação e expressão: interpretar, avaliar e validar não somente o modelo obtido, mas também suas contribuições, expressando para a turma o que se foi produzido; Meyer, Caldeira e Malheiros (2019), validar as soluções matemáticas de acordo com a questão real.

Essas etapas da Modelagem Matemática se assemelham ao que se passa na etapa (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado, das Investigações Matemáticas, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2019). Nessa etapa das Investigações, os alunos formulam e testam conjecturas, depois as validam ou não. Em todas elas, em ambas as metodologias, a comunicação oral pode emergir em discussões (RODRIGUES, MENEZES e PONTE, 2018), explicações instrucionais (LEINARDT, 2001), argumentações (RODRIGUES, 2015) ou perguntas (PINHEIRO e MEDEIROS, 2019) entre os participantes, de modo a enriquecer as interações verbais e os processos de ensino e de aprendizagem por meio do discurso.

Em Kaiser e Srinaman (2006) encontramos cinco perspectivas sobre a Modelagem em Educação Matemática: Realística — as situações-problema são autênticas e retiradas da indústria ou da ciência, habilidades de resolução de problemas aplicados; Epistemológica (ou Modelagem Teórica) — as situações-problema são formuladas para gerarem a teoria matemática; Educacional (Modelagem Didática e Modelagem Conceitual) — é proposta nas situações-problema autênticas com o desenvolvimento da teoria matemática; Sócio-crítica — as situações-problema proporcionam análise da natureza dos modelos matemáticos e seu papel na sociedade; Contextual — as situações-problema vão ser utilizadas na construção da teoria matemática, mas fundamentadas nos estudos psicológicos sobre sua aprendizagem.

Por sua vez, Barbosa e Santos (2007) discutem a relação entre a perspectiva sociocrítica da Modelagem Matemática e a noção de discussões reflexivas. Para estes autores, a utilização da expressão *sociocrítica* assinala um modo de ver a Modelagem na Educação Matemática como um reconhecimento àquelas práticas pedagógicas que compreendem este ambiente de aprendizagem e como uma oportunidade para os alunos discutirem a natureza e o papel dos modelos matemáticos na sociedade.

Estes autores apresentam, no contexto da prática de Modelagem, as discussões

reflexivas. Estas discussões são de três tipos: discussões matemáticas — referem-se estritamente aos conceitos e algoritmos matemáticos; discussões técnicas — referem-se aos processos de simplificação e matematização da situação-problema; discussões reflexivas — referem-se à reflexão sobre os critérios utilizados na construção de modelos e seu papel na sociedade.

Na perspectiva sociocrítica, na qual nos situamos, encontramos as discussões reflexivas. As discussões matemáticas e as técnicas são meios para alcançar as discussões reflexivas. Estas discussões, segundo os autores, são um tipo de discurso estranho à Matemática escolar, portanto, a nosso ver, precisa ser encorajado pelo professor, mas pode ter origem no discurso dos alunos. O filósofo russo Bakhtin (1981, 2003) também nos traz elementos teóricos sobre a linguagem que podem influenciar a comunicação na sala de aula de Matemática e as tarefas de Modelagem e Investigação. Neste sentido, as interações verbais nas aulas de Matemática também podem ser perspectivadas como polifonia e polissemia. A polifonia tem como característica a diversidade de vozes, podendo ocorrer em textos ou no discurso. A polissemia, por sua vez, se refere aos diversos significados das palavras.

Durante uma aula de Matemática, com tarefas de Modelagem Matemática ou Investigação Matemática, o professor e os alunos podem apresentar um discurso com polifonia. Essa característica é particularmente importante na fase de validação do modelo e de defesa de conjecturas e argumentações nas Investigações Matemáticas. Essa polifonia, encorajada pelo professor de Matemática e entre os alunos, pode também fazer emergir uma polissemia nas interações verbais. Para dirimir ou buscar dirimir esta polissemia, em busca de compreensão dos significados emergentes, é fundamental uma negociação de significados (BISHOP e GOFFREE, 1986).

De acordo com Bishop e Goffre (1986), a negociação de significados é a mais difícil das componentes para descrever a interação e a dinâmica da sala de aula. Para negociar os significados, o professor precisará reduzir e ajustar o seu controle na relação de poder com os estudantes. Diversos significados podem ser negociados nessas interações, por exemplo, de conceitos e de representações. Quando nos referimos a texto, em Bakhtin (2003), trata-se de um todo coerente e com significado. Neste sentido, atualmente, podemos atribuir uma variedade de situações que podem ser consideradas um todo coerente e com significado. Nesse sentido, uma partitura, uma charge, uma palavra, uma fórmula matemática, um gráfico, também podem ser perspectivados como um texto (MEDEIROS e SANTOS, 2007).

O texto no sentido bakhtiniano pode ser utilizado como tema de tarefas de Modelagem Matemática ou tarefas de Investigação Matemática. A intertextualidade (KRISTEVA, 1974) pode ser explorada como em Medeiros e Santos (2007), em que onze textos no sentido bakhtiniano foram utilizados pelos alunos para formular problemas matemáticos e, ao final, os alunos foram questionados sobre que tema era comum aos onze textos. Após o texto ser interpretado, na relação intertextual, pode ser tema de uma atividade de Modelagem Matemática ou tarefas de Investigação Matemática. O tema encontrado, por meio da intertextualidade, proporcionará interações verbais ainda mais ricas e auspiciosas.

Em Chomsky (1980, p. 40) também encontramos referência ao significado que nem sempre será compreendido pelos demais participantes das interações verbais, tal qual o participante que proferiu as palavras pensou:

Minhas palavras têm um significado estrito e posso muito bem querer significar o que eu digo, mas a compreensão total daquilo em que tenciono que minha audiência (se houver alguma) acredite ou que ela faça poderia fornecer pouca ou nenhuma indicação do significado do meu discurso. (CHOMSKY, 1971, p. 19).

Em outra passagem, Chomsky (1980, p. 35) nos apresenta que Searle, um filósofo da linguagem, sugere uma abordagem da língua que pode ser considerada de senso comum. Ele considera a "imagem da linguagem humana de acordo com o senso comum" como algo semelhante ao seguinte:

O objetivo da linguagem é a comunicação, quase da mesma forma como o propósito do coração é bombear sangue. Em ambos os casos, é possível estudar a estrutura independente mente da função, mas é inútil e também um equívoco fazer tal coisa, já que estrutura e função interagem de maneira tão óbvia. Nós nos comunicamos em primeiro lugar com outras pessoas, mas também conosco mesmos, como durante um soliloquio, ou como quando pensamos com palavras.

Em Chomsky e Bakhtin, podemos identificar que o significado, emergente nas interações verbais na sala de aula, durante as tarefas de Modelagem Matemática e Investigações Matemáticas, precisa ser cuidadosamente explorado pelo professor, para que a aprendizagem das ideias matemáticas seja aquela planejada, uma vez que as ambiguidades na comunicação podem causar muitas interpretações diferentes do significado preciso dos conceitos e definições matemáticas. Neste sentido, a concisão, a precisão e a exatidão, necessárias a isso, precisa ser negociada entre os participantes e validada pelo professor.

Para Sfard (2018), a aprendizagem ocorre entre as pessoas e o discurso é um indicador

de aprendizagem. Para a autora, aprender significa mudar o discurso:

Discursos matemáticos são o principal objeto de pesquisa comognitiva e desenvolvimento desses discursos é o tema principal. Em contraste com estudos psicológicos que tendem a analisar a aprendizagem como o processo de mudança no aprendiz, investigações comognitiva buscam transformações no discurso matemático. Como forma de atividade comunicativa, o aprendizado agora é concebido como inerentemente coletivo, ou social, ao invés de fenômeno individual. (SFARD, 2018, p. 3)

A comognição (comunicação + cognição), segundo a autora, é a noção da abordagem da aprendizagem fundamentada na suposição do pensamento pode ser em última instância, conceituado como comunicação de alguém consigo mesmo, uma autocomunicação. Esta noção vai de encontro à divisão cartesiana entre corpo e mente.

A Matemática, segundo a autora, pode ser encarada como uma forma de comunicação, um tipo de discurso. Para a autora, considerar a Matemática como uma forma de discurso e o discurso como um indicador de aprendizagem matemática, implica que a aprendizagem individual se origina na comunicação com os outros e é dirigida pela necessidade de ajustar seu modo discursivo ao de outras pessoas. Na sua perspectiva, o lugar da aprendizagem é *entre* as pessoas.

Desse modo, focar no discurso e nas interações verbais, durante as atividades de Modelagem Matemática de cunho investigativo também nos traz uma possibilidade de explorar elementos teóricos da comognição, para compreendermos a aprendizagem matemática, ainda pouco explorados no Brasil.

## 5 Considerações

Com relação à metodologia investigativa no que tange a seu conceito e objetivos, tem-se que a Investigação Matemática apresenta-se como uma possibilidade na busca por estratégias de ensino, que possibilita ao aluno uma compreensão de que a Matemática não é uma ciência pronta e acabada, mas sim que é possível *fazer matemática* também na sala de aula e, nessa construção, compreendê-la. Vimos também que a Investigação Matemática na Sala de Aula proporciona um ambiente que possibilita ao aluno o espírito criativo, crítico e pesquisador.

Por outro lado, a Modelagem Matemática, que a partir das definições apresentadas, pode também ser considerada como o processo de validação do modelo matemático, por proporcionar e estimular o desenvolvimento cognitivo, a criatividade, investigação, criticidade, entre outras

habilidades, se configurando como uma possibilidade de estratégia de ensino e de aprendizagem.

Tanto na Investigação Matemática quanto na Modelagem Matemática obteve-se uma relação muito próxima com a discussão aqui feita. No caso da Investigação Matemática, Ponte (2003) considera que se pode até mesmo considerar uma equivalência entre ambas. A Modelagem Matemática na perspectiva de solucionar e compreender situações-problema perfaz o caminho da pesquisa científica.

Outra característica comum entre ambas tendências refere-se às etapas, conforme apresentamos relação com as diferentes concepções apresentada. Assim, consideramos que a Modelagem Matemática pode ser apresentada como uma metodologia investigativa nas aulas de Matemática.

Refletimos aqui possibilidades da Modelagem Matemática como uma metodologia investigativa nas aulas de Matemática, bem como o que pode favorecer ou dificultar a implementação desta metodologia na sala de aula, como as concepções do professor e dos alunos sobre a Matemática, as concepções dos alunos sobre a aula de Matemática, os papéis do professor e dos alunos nessas aulas, aspectos que podem se constituir em empecilhos ou suportes das interações. A escolha pela estratégia de ensino e de aprendizagem exploratória (PONTE, 2017) nos parece o mais auspicioso para uma aprendizagem matemática efetiva e o desenvolvimento da autonomia dos alunos (FREIRE, 1996).

A exploração da comunicação oral, particularmente na etapa de validação, durante estas tarefas pode ser um novo aspecto a ser implementado nas tarefas de Modelagem Matemática como uma metodologia investigativa e trazer contribuições para as pesquisas que estudam a aprendizagem na perspectiva da comognição, pois mais pesquisa com este referencial de aprendizagem se faz necessário.

### **Agradecimentos**

Agradecemos à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Mato Grosso (FAPEMAT) pela bolsa de doutorado, no âmbito do Projeto *Biomatemática e Espaços não Formais: Possibilidades para o Ensino de Matemática no Ensino Superior*, desenvolvido no Doutorado em Educação em Ciências e Matemática no âmbito da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC).

## Referências

- ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. [Estratégias heurísticas como meios de ação em atividades de Modelagem Matemática](#). *Com a Palavra o Professor*, Vitória da Conquista, v. 5, n. 11, jan./abr. 2020.
- ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. [Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise](#). *Zetetiké*, Campinas, v. 18, p. 387-414, dez. 2010.
- ARAÚJO, Jussara de Loiola. *Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática: as discussões dos alunos*. 2002. 180f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro.
- ARAÚJO, Jussara de Loiola. [Uma abordagem sócio-crítica da modelagem matemática: a perspectiva da Educação Matemática Crítica](#). *Alexandria*, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 55-68, 2009.
- ARAÚJO, Jussara de Loiola; ROCHA, Ana Paula; MARTINS, Danielle Alves. Papel da Matemática (ou de modelos matemáticos) em ambientes de modelagem: a proposta de Rafael. *Rematec*, Natal, v. 9, n. 17, p. 5-23, set./dez. 2014.
- BAKHTIN, Mikhail. *Estética da criação verbal*. Tradução de Paulo Bezerra. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2003.
- BAKHTIN, Mikhail. *Marxismo e filosofia da linguagem: problemas fundamentais do Método Sociológico na Ciência da Linguagem*. Tradução de Michel Lahud e Yara Frateschi Vieira. 2. ed. São Paulo: Hucitec, 1981.
- BARBOSA, Jonei Cerqueira. *Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? Veritati*, Salvador, n. 4, p. 73-80, 2004.
- BARBOSA, Jonei Cerqueira; SANTOS, Marluce Alves dos. [Modelagem matemática, perspectivas e discussões](#). In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007, Belo Horizonte. Anis do IX ENEM: Diálogos entre a pesquisa e a prática educativa. Belo Horizonte: SBEM, 2007, p. 1-12.
- BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. 4 ed. São Paulo: Contexto, 2014.
- BASSANEZI, Rodney Carlos. *Modelagem Matemática: teoria e prática*. São Paulo: Contexto, 2015.
- BASSANEZI, Rodney Carlos; FERREIRA JR, Wilson Castro. *Equações Diferenciais com aplicações*. São Paulo: Harbra, 1988.
- BIEMBENGUT, Maria Salett. *Modelagem na Educação Matemática e na Ciência*. São Paulo: Livraria da Física, 2016.
- BISHOP, Alan John; GOFFREE, Fred. Classroom organization and dynamics. In: CHRISTIANSEN, Bent; HOWSON, Geoffrey; OTTE, Michael (Ed.) *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht: D. Reidel, 1986, p. 309-365.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Curricular*

Comum. Brasília: MEC/SEB, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais – terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática e a sala de aula. In: I ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2004, Londrina. Anais do I EPREM. Londrina: UEL, 2004, p. 1-10.

CHOMSKY, Noam. *Reflexões sobre a linguagem*. Tradução de Calos Vogt *et al.* São Paulo: Cultrix, 1980.

D'AMBROSIO, Ubiratan. [A Educação Matemática hoje: porque e como?](#) In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12, 2016, São Paulo. Anais do XII ENEM — Educação Matemática na contemporaneidade: desafios e possibilidades. São Paulo: SBEM: 2016, p. 1-5.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Educação Matemática: da teoria à prática*. 23. ed. Campinas: Papyrus, 2019.

FERNANDES, Fernando Luís Pereira. [Um olhar para as relações entre platonismo e concepções de ensino de Matemática](#). *Nucleus*, Ituverava, v. 13, n. 2, p. 33-37, out. 2016.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. 25 ed. São Paulo. Paz e Terra, 1996.

KAISER, Gabriele; SRIRAMAN, Bharath. [A global survey of international perspectives on modelling in Mathematics Education](#). *ZDM Mathematics Education*, v. 38, n. 3, p. 302-310, jun. 2006.

KRISTEVA, Julia. Introdução à semanálise. Tradução de Lucia Helena Ferraz. São Paulo: Perspectiva, 1974.

LAKATOS, Imre. *A lógica do descobrimento matemático: provas e refutações*. Tradução de Nathanael Caixeiro. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

LEINHARDT, Gaea. Instructional explanations: a commonplace for teaching and location for contrast. In: RICHARDSON, Virginia. (Ed.). *Handbook for research on teaching*. Washington: American Educational Research Association, 2001, p. 333-357.

MACHADO, Nilson José. *Epistemologia e didática: as concepções de conhecimento inteligência e a prática docente*. São Paulo: Cortez, 2016.

MEDEIROS, Katia Maria; MEIRA, Gilmaria Gomes. [A resolução de problemas geométricos como alternativa de comunicação matemática em sala de aula](#). *Vidya*, Santa Maria, v. 39, n. 1, p. 291-309, jan./jun. 2019.

MEYER, João Frederico da Costa Azevedo; CALDEIRA, Ademir Donizeti; MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. *Modelagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

PINHEIRO, Joseane Mirtis de Queiroz; MEDEIROS, Kátia Maria de. [As perguntas para desenvolver estratégias: álgebra e resolução de problemas no Ensino Médio](#). In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13, 2019, Cuiabá. Anais do XIII ENEM — Educação Matemática com as escolas da Educação Básica: interfaces entre pesquisas e salas de aula. Cuiabá: SBEM, 2019, p. 1-15.

PONTE, João Pedro da. Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. In: BROWN, Margaret; FERNANDES, Domingos; MATOS, José Manuel; PONTE, João Pedro da. (Coord.). *Educação Matemática*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992, p. 185-239.

PONTE, João Pedro da. *Investigações matemáticas e investigações na prática profissional*. São Paulo: Livraria da Física, 2017.

PONTE, João Pedro da. Investigar, ensinar e aprender. In: ENCONTRO NACIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA, 19, 2003, Santarém. Actas do XIX ProfMat. Lisboa: APM, 2003, p. 25-39.

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações Matemáticas na sala de aula*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

RODRIGUES, Adrielly Soraya Gonçalves. [Exploração da calculadora no desenvolvimento de uma cultura de argumentação nas aulas de Matemática](#). 2015. 144f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) — Centro de Ciências e Tecnologias. Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande.

RODRIGUES, Alexandra; CARREIRA, Suzana. Investigando a aula. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2018, Coimbra. Actas do EIEM: a aula de Matemática. Coimbra: SPIEM, 2018, p. 61-66.

RODRIGUES, Cátia; MENEZES, Luis; PONTE, João Pedro da. [Discussões coletivas em Matemática: um olhar sobre a prática de três professores](#). In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2018, Coimbra. Actas do EIEM 2018: a aula de Matemática. Coimbra: SPIEM, 2018, p. 261-278.

SFARD, Anna. [Commognition](#). In: LERMAN, Stephen (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education*. New York: Springer, 2018, p. 1-7.

SKOVSMOSE, Ole. *Educação Matemática Crítica: a questão da democracia*. Campinas: Papirus, 2001

SKOVSMOSE, Ole. *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.